Fachbereich Mathematik | Sommersemester 23, Blatt 3
Thomas Markwig | Umut Özcan

Analysis 2 / Mathematik für Physiker 3

Abgabetermin: Montag, 08.05.2023, 10:00

Die Lösungen zu den drei ersten Aufgaben sind zur Bewertung einzureichen. Zwei der Aufgaben werden korrigiert, eine wird nur hinsichtlich des Kriteriums *sinnvoll bearbeitet* geprüft. Die letzte Aufgabe ist eine Präsenzaufgabe und wird in den Übungen in Kleingruppen bearbeitet.

Aufgabe 5: Zeige die Äquivalenz folgender Aussagen für eine Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ zwischen den metrischen Räumen (X, d_x) und (Y, d_y)

a. f ist stetig

b. $\forall a \in X \, \forall \epsilon > 0 \, : \,$ a ist innerer Punkt von $f^{-1}[U_\epsilon(f(a))]$

c. $\forall B \subseteq X \, : \, f(\overline{B}) \subseteq \overline{f(B)}$

d. $\forall A \subseteq Y \, : \, \overline{f^{-1}(A)} \subseteq f^{-1}(\overline{A})$

Aufgabe 6: Zeige, ist $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ symmetrisch, so ist

$$||f_A|| = \max\left\{|\lambda| \;\middle|\; \lambda \text{ ist Eigenwert von } A\right\}$$

die Operatornorm von $f_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n : x \mapsto Ax$ bezüglich der euklidischen Norm auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^n$ als Definitions- und Zielbereich von f_A.

Aufgabe 7: Sei (M, d) ein kompakter metrischer Raum und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gleichmäßig konvergente Folge stetiger Funktionen. Zeige, dass die Menge $\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ dann auch gleichstetig auf M ist.

Präsenzaufgabe 9:

a. Begründe bitte, weshalb die Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$(r, \theta, \vartheta) \mapsto \big(r \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(\vartheta), r \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\vartheta), r \cdot \sin(\vartheta)\big)$$

total differenzierbar auf $\mathbb{R}^3$ ist und berechne die Ableitung $D\varphi(r, \theta, \vartheta)$. Für welche $(r, \theta, \vartheta)^t \in \mathbb{R}^3$ ist die Matrix $D\varphi(r, \theta, \vartheta)$ invertierbar?

b. Berechne die Ableitung von $f \circ \varphi$ im Punkt $a = (1, 0, \frac{\pi}{2})^t$ für $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} : (x, y, z)^t \mapsto x^2 + y^2 + z^2$ zunächst mit Hilfe der Kettenregel und dann ohne diese.