Fachbereich Mathematik — Sommersemester 23, Blatt 4

Thomas Markwig — Umut Özcan

Analysis 2 / Mathematik für Physiker 3

Abgabetermin: Montag, 15.05.2023, 10:00

Die Lösungen zu den drei ersten Aufgaben sind zur Bewertung einzureichen. Zwei der Aufgaben werden korrigiert, eine wird nur hinsichtlich des Kriteriums *sinnvoll bearbeitet* geprüft. Die letzte Aufgabe ist eine Präsenzaufgabe und wird in den Übungen in Kleingruppen bearbeitet.

Aufgabe 8:

a. Zeige, die folgende Funktion ist total, aber nicht stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}^2$:

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \begin{cases} ||x||_2^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{||x||_2}\right), & \text{falls } x \neq 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

b. Zeige, dass für die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \begin{cases} \frac{x_1^3x_2 - x_1x_2^3}{x_1^2+x_2^2}, & \text{falls } (x_1,x_2)^t \neq (0,0)^t \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die beiden partiellen Ableitungen $D_1D_2f(0,0)$ und $D_2D_1f(0,0)$ existieren, aber nicht überein stimmen.

Aufgabe 9: Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $a \in U$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ sei stetig in a und $g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ sei total differenzierbar in a mit $g(a) = 0$.

Zeige, dann ist $f \cdot g$ total differenzierbar in a mit $D(f \cdot g)(a) = f(a) \cdot Dg(a)$.

Aufgabe 10: Es sei $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}^n$ total differenzierbar mit $f(t \cdot x) = t^d \cdot f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Zeige, dann erfüllt f für alle $x \in \mathbb{R}^n$ die Eulersche Gleichung

$$x_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + x_n \cdot \frac{\partial f}{\partial x_n} = d \cdot f(x).$$

Hinweis, bestimme $Dg(1)$ für $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : t \mapsto f(t \cdot x)$ auf zwei Arten. Weshalb ist g total differenzierbar?

Präsenzaufgabe 10:

a. Bestimme das zweite Taylor-Polynom $T^2_{f,a}$ im Entwicklungspunkt $a = (0,\pi)^t$ für

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : (x,y)^t \mapsto \cos(y) \cdot \exp(x^2) - \sin(y) \cdot \exp(x).$$

b. Bestimme alle lokalen Extrema und Sattelpunkte der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y)^t \longmapsto x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20.$$