Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Sommersemester 23, Blatt 5

Umut Özcan

Analysis 2 / Mathematik für Physiker 3

Abgabetermin: Montag, 22.05.2023, 10:00

Aufgabe 11: Zeige, dass die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y)^t \longmapsto (y-x^2)\cdot(y-2x^2)$ keine Extremstelle hat, dass aber für jede Gerade $G \subseteq \mathbb{R}^2$ durch $(0,0)^t$ die Funktion $f_{|G}$ ein isoliertes lokales Minimum in $(0,0)^t$ besitzt.

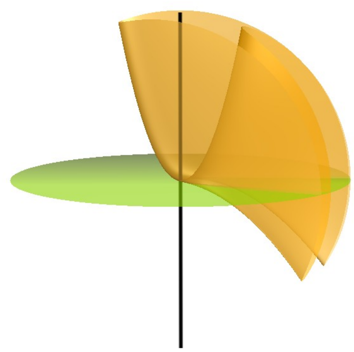

Abbildung 1: Graph der Funktion $(x,y) \mapsto (y-x^2)\cdot(y-2x^2)$ (gelb)

Aufgabe 12:

a. Es sei $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$. Zeige, für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $f(x,y) = f(x+y,0)$ und finde eine solche Funktion.

b. Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ sei zweifach stetig differenzierbar und die Hesse-Matrix $H_f(x)$ sei positiv definit für alle $x \in \mathbb{R}^2$. Zeige, f hat höchstens einen kritischen Punkt.

Aufgabe 13: Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ sei partiell differenzierbar mit beschränkten partiellen Ableitungen. Zeige, dass die Funktion f dann lokal Lipschitz stetig auf U ist.

Hinweis: Verwende auf $\mathbb{R}^2$ die $\|\cdot\|_1$-Norm und wende zweimal den Mittelwertsatz der eindimensionalen Differentialrechung an.

Präsenzaufgabe 11: Zeige mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes, daß die rekursiv definierte Folge $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$ für jeden Startwert $a_0 \in [0,\infty)$ konvergiert und daß der Grenzwert nicht vom Startwert abhängt.