Fachbereich Mathematik — Sommersemester 23, Blatt 6
Thomas Markwig — Umut Özcan

Analysis 2 / Mathematik für Physiker 3

Abgabetermin: Montag, 05.06.2023, 10:00

Aufgabe 14: Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine q-Kontraktion. Zeige mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes, dass dann die folgende Funktion surjektiv ist:

$$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x_1, x_2)^t \longmapsto (x_1 + f(x_2), x_2 + f(x_1))^t.$$

Aufgabe 15: [Differenzierbare Abhängigkeit der Nullstellen eines Polynoms]
Seien $a_0, \ldots, a_d : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen und für jedes $s \in \mathbb{R}$ sei

$$p_s := \sum_{k=0}^{d} a_k(s) \cdot t^k \in \mathbb{R}[t].$$

Zeige, wenn $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ eine einfache Nullstelle* des Polynoms p_0 ist, dann gibt es $\varepsilon > 0$ und $r > 0$, so dass

- p_s für jedes $s \in U_\varepsilon(0)$ genau eine Nullstelle $\lambda_s \in U_r(\lambda_0)$ besitzt und
- die Abbildung $\lambda : U_\varepsilon(0) \longrightarrow \mathbb{R} : s \mapsto \lambda_s$ stetig differenzierbar ist.

Ist die Aussage auch noch richtig, wenn λ_0 eine mehrfache Nullstelle von p_0 ist?

Aufgabe 16: Sei $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $f(0,0) = 0$. Finde mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen Bedinungen an die Funktion f, so dass die Gleichung $f(f(x,y),y) = 0$ lokal in $a = (0,0)^t$ nach y aufgelöst werden kann.

Präsenzaufgabe 12:

a. Zeige, daß die Verschwindungsmenge $V(f)$ für

$$f : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x_1, x_2, x_3, y_1, y_2)^t \mapsto \left(x_1x_2^2 + x_1x_3y_1 + x_2y_2^2 - 3, x_2x_3y_1^3 + 2x_1y_2 - y_1^2y_2^2 - 2\right)^t$$

lokal in $(1,1,1,1,1)$ als Graph einer Abbildung $\varphi : U_\varepsilon(1,1,1) \longrightarrow U_r(1,1)$ darstellbar ist und berechne $D\varphi(1,1,1)$.

b. Überprüfe, ob die Abbildung $f : \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) : X \mapsto X^2$ in den folgenden Punkten lokal invertierbar ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

*Man darf ohne Beweis verwenden, dass eine Nullstelle eines Polynoms genau dann eine einfache Nullstelle ist, wenn sie keine Nullstelle der Ableitung des Polynoms ist.