Fachbereich Mathematik — Sommersemester 23, Blatt 7
Thomas Markwig — Umut Özcan

Analysis 2 / Mathematik für Physiker 3

Abgabetermin: Montag, 12.06.2023, 10:00

Aufgabe 17: Bestimme mit Hilfe des Verfahrens der Lagrange Multiplikatoren eine Matrix $X \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ mit $\det(X) = 0$, deren Abstand zur Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

in der euklidischen Norm minimal ist.

Aufgabe 18: Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $f : \overline{U} \to \mathbb{R}^n$ sei stetig auf $\overline{U}$. Zeige, ist f auf U ein lokaler Diffeomorphismus, so besitzt die Funktion

$$g : \overline{U} \to \mathbb{R}, x \mapsto \|f(x)\|$$

ein globales Maximum und dieses wird auf dem Rand ∂U angenommen.

Aufgabe 19: Es seien $p, q \in \mathbb{R}_{>1}$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Bestimme die Extremstellen der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2_{>0} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x_1^p}{p} + \frac{x_2^q}{q}$$

unter der Nebenbedingung $x_1 x_2 = 1$. Folgere daraus für $u, v > 0$ die Höldersche Ungleichung $\frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q} \geq uv$.

Präsenzaufgabe 13: (Kugelkoordinaten)
Zeige, daß die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 : (r, \theta, \vartheta) \mapsto \big(r \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(\vartheta), r \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\vartheta), r \cdot \sin(\vartheta)\big)$$

auf der offenen Menge

$$U = (0, \infty) \times (0, 2\pi) \times \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right)$$

ein Diffeomorphismus ist mit Funktionaldeterminante

$$\det(D\varphi(r, \theta, \vartheta)) = r^2 \cdot \cos(\vartheta) > 0.$$