Fachbereich Mathematik Sommersemester 23, Blatt 8
Thomas Markwig Umut Özcan

Analysis 2 / Mathematik für Physiker 3

Abgabetermin: Montag, 19.06.2023, 12:00

Aufgabe 20:

a. Zeige, sind $f, g : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ auf dem Quader $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ integrierbar, so ist $f \cdot g$ auf $Q \times Q$ integrierbar und

$$\int_{Q\times Q} f(x) \cdot g(y) \; d(x, y) = \int_Q f(x) \; dx \cdot \int_Q g(y) \; dy.$$

b. Es sei $[a, b]$ ein Intervall in $\mathbb{R}$ und $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$ sei stetig. Zeige,

$$\int_a^b f(x) \; dx \cdot \int_a^b \frac{1}{f(x)} \; dx \geq (b - a)^2.$$

Hinweis zu b.: Setze die linke Seite der Ungleichung zu $\frac{1}{2} \cdot \int_{[a,b]\times[a,b]} \frac{f(x)}{f(y)} + \frac{f(y)}{f(x)} \; d(x, y)$ in Beziehung und verwende Teil a.

Aufgabe 21: Für eine rationale Zahl $x = \frac{a}{b}$ mit $a, b > 0$ setzen wir $N(x) = \frac{b}{\mathrm{ggt}(a,b)}$, d.h. $N(x)$ ist der Nenner von x in gekürzter Form und wir setzen $N(0) = 1$. Untersuche die Funktion

$$g : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} : (x, y)^t \mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } x, y \in \mathbb{Q} \text{ mit } N(x) = N(y), \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

bezüglich ihrer Integrierbarkeit auf $[0, 1] \times [0, 1]$.

Aufgabe 22: Berechne die folgenden Integrale:

a. $\displaystyle\int_{[0,1]\times[0,1]\times[0,1]} \frac{x^2z^3}{1+y^2} \; d(x, y, z).$

b. $\displaystyle\int_{[-\frac{\pi}{4},0]\times[0,2]\times[0,\frac{\pi}{4}]} \frac{\sin(x+2z)}{y+2} \; d(x, y, z).$

Präsenzaufgabe 14: Zeige, dass die beiden Doppelintegrale in der folgenden Ungleichung existieren und dass ihr Wert nicht übereinstimmt:

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x - y}{(x + y)^3} \; dx \; dy \neq \int_0^1 \int_0^1 \frac{x - y}{(x + y)^3} \; dy \; dx.$$

Wie ist dies mit dem Satz von Fubini über die Vertauschbarkeit der Integrationsreihenfolge verträglich? Was gilt für den Grenzwert

$$\lim_{\substack{(a,b)\to(0,0)\\ a,b>0}} \int_{[a,1]\times[b,1]} \frac{x - y}{(x + y)^3} \; dx \; dy.$$