Analysis 2 / Mathematik für Physiker 3

Abgabetermin: Montag, 26.06.2023, 12:00

Aufgabe 23: Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader. Wir nennen eine beschränkte Funktion $f : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion, wenn es eine Zerlegung Z von Q gibt, so dass f im Inneren jedes Teilquaders von Z konstant ist, und wir nennen die Zerlegung Z dann zu f passend.

a. Zeige, jede Treppenfunktion $f : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ ist Riemann-integrierbar mit

$$\int_Q f(x)\, dx = \sum_{P \in TQ(Z)} c_P \cdot V(P),$$

wenn Z eine zu f passende Zerlegung ist und c_P der konstante Wert ist, den f auf dem Quader P annimmt.

b. Zeige, ist $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Treppenfunktionen auf Q, die auf Q gleichmäßig gegen eine Funktion $f : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ konvergiert, dann ist auch f Riemann-integrierbar und es gilt

$$\int_Q f(x)\, dx = \lim_{m\to\infty} \int_Q f_m(x)\, dx.$$

Aufgabe 24: Seien $a, b \in \mathbb{R}^n$ mit $a < b$ und $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ seien beschränkt und fast überall gleich, d.h. es gibt eine Nullmenge N, so dass $f(x) = g(x)$ für alle $x \in [a, b] \setminus N$.

a. Ist N abgeschlossen in $[a, b]$ und f integrierbar, so ist auch g integrierbar.

b. Sind f und g auf $[a, b]$ integrierbar, so gilt

$$\int_{[a,b]} f(x)\, dx = \int_{[a,b]} g(x)\, dx.$$

Aufgabe 25: Zeige, dass jede Hyperebene im $\mathbb{R}^n$ eine Nullmenge ist.

Präsenzaufgabe 15: Zeige, dass die Kugeloberfläche $K \subset \mathbb{R}^3$, gegeben durch

$$K = \{(x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

eine Jordan-Nullmenge ist.