Analysis 2 / Mathematik für Physiker 3

Abgabetermin: Montag, 03.07.2023, 12:00

Aufgabe 26: Zeige oder widerlege für den Abschluss $\overline{B}$ von B die Aussagen:

a. Ist $B \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Jordan-Nullmenge, dann ist auch $\overline{B}$ eine Jordan-Nullmenge.

b. Ist $B \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge und beschränkt, dann ist auch $\overline{B}$ eine Nullmenge.

Aufgabe 27: Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar und $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ mit $f_m : B \longrightarrow \mathbb{R}$ sei eine Folge integrierbarer Funktionen, die auf B gleichmäßig gegen eine Funktion f konvergiere.
Zeige, dann ist f integrierbar auf B und es gilt

$$\lim_{m\to\infty} \int_B f_m(x)\, dx = \int_B f(x)\, dx.$$

Hinweis, man verwende das Lebesguesche Integrabilitätskriterium und verallgemeinere passende Beweise aus der eindimensionalen Analysis.

Aufgabe 28: [Cantor-Menge]
Wir definieren rekursiv eine Folge von Mengen durch $U_1 := \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ und

$$U_n := \left\{ \frac{x}{3}, \frac{x+2}{3} \;\middle|\; x \in U_{n-1} \right\}$$

für $n \geq 2$, und nennen

$$C := [0,1] \setminus \bigcup_{n\geq 1} U_n$$

dann die Cantor-Menge.* Zeige, dass C eine kompakte Jordan-Nullmenge ist.

Präsenzaufgabe 16:

a. Schreibe den Normalbereich $B = \{(x,y)^t \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq x \leq \sin(y)\}$ bezüglich (y,x) als Normalbereich bezüglich (x,y).

b. Berechne das Integral $\int_B (x^2+y^2)\, d(x,y)$ über dem Dreieck mit den Eckpunkten $(0,0)^t$, $(1,0)^t$ und $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^t$.

---

*Stellen wir uns die Konstruktion von C als Prozess vor, bei dem wir sukkzessive die Mengen U_n entfernen, so wird im ersten Schritt mit U_1 das mittlere Drittel des Intervalls $[0,1]$ entfernt; im zweiten Schritt wird mit U_2 dann das mittlere Drittel der verbleibenden beiden Intervalle entfernt; und so fahren wir dann fort.