Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig Sommersemester 23, Blatt 11
Umut Özcan

Analysis 2 / Mathematik für Physiker 3

Abgabetermin: Montag, 10.07.2023, 12:00

Aufgabe 29:

a. Schreibe den Normalbereich $B = \{(x,y)^t \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq x \leq \sin(y)\}$ bezüglich (y,x) als Normalbereich bezüglich (x,y).

b. Berechne das Integral $\int_B x \; d(x,y)$ über dem Normalbereich B, der im ersten Quadranten von den beiden Kurven mit den Gleichungen $y = \sqrt{x}$ und $y = x^2$ eingeschlossen wird.

c. Wie groß ist das Volumen des Körpers, der von der Fläche mit der Gleichung $z = xy$, dem Dreieck mit den Eckpunkten $(0,0,0)^t$, $(1,0,0)^t$ und $(0,1,0)^t$ sowie der Ebene mit der Gleichung $x + y = 1$ begrenzt wird.

d. Bestimme das Volumen des Ellipsoids

$$E = \left\{ (x,y,z)^t \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} \leq 1 \right\}.$$

Aufgabe 30: [Das Prinzip von Cavalieri]
Sei $B \subseteq [a,b] \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar und für jedes $t \in [a_1, b_1]$ sei der Hyperebenenschnitt $H_t = B \cap V(x_1 - t)$ Jordan-messbar mit Volumen $v(t)$. Zeige zunächst

$$V(B) = \int_{a_1}^{b_1} v(t) \; dt,$$

und zeige für kompaktes B und stetiges $f : B \longrightarrow \mathbb{R}$ zudem

$$\int_B f(x) \; dx = \int_{a_1}^{b_1} \int_{H_t} f(t,y) \; dy \; dt.$$

Aufgabe 31: Seien $B = \{(x,y)^t \in \mathbb{R}^2_{\geq 0} \mid x + y \leq 1\}$ und $m, n \in \mathbb{N}$ zwei natürliche Zahlen. Beweise die Gleichung

$$\int_B x^n y^m \; d(x,y) = \frac{n! \cdot m!}{(n+m+2)!}.$$

Präsenzaufgabe 17:

a. Berechne das Integral $\int_B \exp(-x^2 - y^2) \; d(x,y)$ für $B = \{(x,y)^t \in \mathbb{R}^2_{\geq 0} \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$.

b. Berechne das Integral $\int_B \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \; d(x,y,z)$, wenn B die Kugel um den Ursprung mit Radius R ist.

c. Berechne das Volumen des Körpers B, der entsteht, indem aus Kugel

$$K = \{(x,y,z)^t \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \cdot R^2\}$$

der Teil entfernt wird, der von dem Zylinder

$$Z = \{(x,y,z)^t \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

ausgeschnitten wird.