Analysis 2 / Mathematik für Physiker 3

Abgabetermin: Montag, 17.07.2023, 12:00

Aufgabe 32: Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^n$ und $W_r = \overline{U_r(a)} \subset U$ bezeichne den Würfel um a mit Kantenlänge $2r$.

a. Zeige, ist f Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante q bez. $\|\cdot\|_\infty$, dann ist

$$V(f(W_r)) \leq q^n \cdot V(W_r) = q^n \cdot 2^n \cdot r^n.$$

b. Zeige, ist f ein Diffeomorphismus, dann gilt

$$\lim_{r\to 0} \frac{V(f(\overline{U_r(a)}))}{2^n \cdot r^n} = |\det Df(a)|.$$

Aufgabe 33: Sei $K_r = \overline{B_r(0)} \subset \mathbb{R}^3$ die Kugel vom Radius r um den Ursprung im $\mathbb{R}^3$. Berechne den Grenzwert

$$\lim_{r\to\infty} \int_{K_r} \frac{1}{(1+x^2+y^2+z^2)^3}\, d(x,y,z).$$

Hinweis: für das Berechnen von Stammfunktionen dürfen Formelsammlungen verwendet werden.

Aufgabe 34: Sei $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare nicht konstante Funktion und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so daß die Differentialgleichung

$$\dot{y}(t) = g(y(t))$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ erfüllt ist. Zeige, daß $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nicht periodisch ist.

Hinweis: zeige zunächst, wenn $\dot{y}(a) > 0$ ist und $y(a) = y(b)$ für $a < b$, dann gibt es ein $c \in (a, b)$ mit $y(a) = y(c)$.

Präsenzaufgabe 18:

a. Wir betrachten die Abbildungsvorschrift

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} : (t, x_1, x_2)^t \mapsto (\cos(t)x_1 + \sin(t)x_2, -\sin(t)x_1 + \cos(t)x_2)\,.$$

(a) Zeige, dass durch φ ein globaler Fluss auf $\mathbb{R}^2$ definiert wird

(b) Beschreibe die Bahnen des Flusses.

(c) Bestimme eine Differentialgleichung, deren zugehöriger Fluss φ ist.

b. Berechne die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $\dot{x} = t \cdot x$ über $\mathbb{R}$.