Universität Tübingen, FB Mathematik | Wintersemester 2017
Thomas Markwig, Jörg Zintl | Florian Johne, Hanna Wallach

Abschlußtest zur Analysis 2 / Mathematik für Physiker 3

Name *Matrikelnummer* *Summe der Punkte*

Klausurtermin:

Hinweise: Die Klausuraufgaben sind jeweils auf getrennten Blättern zu bearbeiten. *Nie zwei Aufgaben auf dem gleichen Blatt lösen!!!*
Alle nicht offensichtlichen Beweis-/Rechenschritte sind zu begründen.
Die Zahlen in Klammern am rechten Seitenrand geben die Punktzahlen an, die durch Lösen der jeweiligen Aufgabe erreichbar sind. Insgesamt sind es 36 Punkte.
Jedes Blatt ist am oberen Rand der Vorderseite wie folgt zu beschriften:

eigener Name *Matrikelnummer* *Aufgabennummer*

Aufgabe 1: Überprüfe, ob $A = \{(x,y)^t \in \mathbb{R}^2 \mid \cos(x) = \exp(y)\}$ abgeschlossen in $\mathbb{R}^2$ bezüglich der euklidischen Norm ist. (2)

Aufgabe 2: Bestimme das Taylorpolynom $T^3_{f,a}$ vom Grad 3 im Entwicklungspunkt $a = (0,0)^t$ der Funktion (4)

$$f : U_1(a) \longrightarrow \mathbb{R} : (x,y)^t \mapsto \frac{(x^3+y^2+1)^2}{1-xy}.$$

Aufgabe 3: Bestimme alle lokalen Extrema und Sattelpunkte der folgenden Funktion (5)

$$f : (\mathbb{R}\setminus\{0\}) \times (\mathbb{R}\setminus\{0\}) \longrightarrow \mathbb{R} : (x,y)^t \mapsto \frac{1}{x} - \frac{9}{y} + x - y.$$

Aufgabe 4: Berechne das Minimum von $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x,y,z)^t \mapsto z-x$ unter den Nebenbedingungen $x^2+y^2+z^2 = 1$ und $x+y+z = 0$. Begründe Dein Ergebnis. (5)

Aufgabe 5: Beweise oder widerlege die folgende Aussage:
Ist $f : (M, d) \longrightarrow (M', d')$ eine gleichmäßig stetige Abbildung zwischen zwei metrischen Räumen und ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in M, so ist auch $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in M'. (4)

Aufgabe 6: Bestimme ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung

$$x'''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = 0$$ (5)

und löse das zugehörige Anfangswertproblem mit $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$ und $x''(0) = -1$.

Aufgabe 7: Sei (M, d) ein metrischer Raum und $A \subseteq M$ eine nichtleere Teilmenge. Zeige, die Abbildung (4)

$$f : M \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \inf\{d(x, a) \mid a \in A\}$$

ist gleichmäßig stetig.

Aufgabe 8: Zeige, dass die Menge $B := \left\{\frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}$ eine nicht kompakte Nullmenge in $\mathbb{R}$ ist. (2)

Aufgabe 9: Gegeben seien die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(x_1, x_2, x_3) := x_1$ und die Menge

$$B := \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + \sqrt{x_2^2 + x_3^2} \leq 1\right\}.$$

a. Zeige, dass B Jordanmeßbar ist. (2)

b. Zeige, dass f auf B integrierbar ist. (1)

c. Berechne das Integral $\int_B f(x)\,dx$. (2)