Analysis 2 / Mathematik für Physiker 3

Abgabetermin: Montag, 23.10.2017, 12:00

Aufgabe 1: Überprüfe, welche der folgenden Mengen A offen, abgeschlossen und / oder kompakt in M ist, wobei wir M mit der euklidischen Norm als normierten Raum betrachten? Was ist der Rand von A?

a. $A = \{(x,y)^t \mid x^2 < y\}$ mit $M = \mathbb{R}^2$,

b. $A = \left\{ \frac{(-1)^n}{2^n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\}$ mit $M = \mathbb{R}$.

Aufgabe 2: Es sei $M = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid a_n \in \mathbb{R}\}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellen Zahlenfolgen und für $A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, B = (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in M$ sei

$$d(A,B) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|a_k - b_k|}{1 + |a_k - b_k|}.$$

Zeige, d ist eine Metrik auf M.

Aufgabe 3: Sei M ein metrischer Raum, $A \subseteq U \subseteq M$. Zeige folgende Aussagen:

a. $\overline{U} = \mathring{U} \,\dot\cup\, \partial U$.

b. ∂U ist abgeschlossen in M.

c. Ist A abgeschlossen und U offen, so ist $U \setminus A$ offen.

Aufgabe 4: Betrachte $U \subseteq M$ als metrischen Raum mit der Einschränkung der Metrik von M.

a. $X \subseteq U$ ist offen in $U \iff \exists\, O$ offen in M mit $X = U \cap O$.

b. $X \subseteq U$ ist abgeschlossen in $U \iff \exists\, A$ abgeschlossen in M mit $X = U \cap A$.

Man nennt die Menge X dann auch *relativ* offen oder abgeschlossen in M.