Fachbereich Mathematik | Wintersemester 2017/18, Blatt 2
Thomas Markwig | Hanna Walach

Analysis 2 / Mathematik für Physiker 3

Abgabetermin: Montag, 30.10.2017, 12:00

Aufgabe 5:

a. Zeige, in einem metrischen Raum ist der Durchschnitt beliebig vieler kompakter Mengen kompakt.

b. Sei $M = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid a_n \in \mathbb{R}\}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellen Zahlenfolgen und für $A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, B = (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in M$ sei

$$d(A,B) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|a_k - b_k|}{1 + |a_k - b_k|}.$$

Zeige, eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in M mit $A_n = (a_{nk})_{k\in\mathbb{N}}$ ist genau dann konvergent, wenn alle Komponentenfolgen $(a_{nk})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren.

Aufgabe 6: Es seien (M, d) ein metrischer Raum, $A \subseteq M$ kompakt und $x \in M$. Begründe, weshalb das Minimum

$$d(x, A) := \min\{d(x, a) \mid a \in A\}$$

existiert und zeige, $d(x, A) = 0$ genau dann, wenn $x \in A$.

Aufgabe 7: Sei $V = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ der Vektorraum der auf dem Intervall $[0,1]$ stetigen Funktionen und es sei

$$||f||_{L_2} = \sqrt{\int_0^1 f^2(x)\ dx}$$

die euklidische L_2-Norm auf V aus Beispiel 22.5.
Zeige, V ist nicht vollständig bezüglich der euklidischen L_2-Norm.

Hinweis: Man betrachte die Funktionenfolge $(f_n)_{n\geq 1}$ mit

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}] \\ \frac{1}{2}n\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} & \text{für } x \in (\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}) \\ 1 & \text{für } x \in [\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1] \end{cases}.$$

Aufgabe 8: Zeige, ist $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ symmetrisch, so ist

$$||f_A|| = \max\left\{|\lambda| \;\middle|\; \lambda \text{ ist Eigenwert von } A\right\}$$

die Operatornorm von $f_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ bezüglich der euklidischen Norm auf $\mathbb{R}^n$.