Analysis 2 / Mathematik für Physiker 3

Abgabetermin: Montag, 06.11.2017, 12:00

Aufgabe 9:

(a) Sei eine Funktion f definiert durch

$$f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y)^t \longmapsto \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Zeigen Sie bitte, dass f im Nullpunkt das Folgenkriterium für Stetigkeit für jede Folge erfüllt, die sich auf einer Geraden dem Nullpunkt nähert. Ist die Funktion f im Punkt $(0,0)$ stetig?

(b) Betrachte die Funktion

$$f:\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)^t\} \longrightarrow \mathbb{R} : (x,y)^t \mapsto \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}.$$

Zeigen Sie bitte,

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y).$$

Ist die Funktion f stetig in den Punkt $(0,0)^t$ fortsetzbar?

Aufgabe 10: Sei $X := [0,\infty)\times[0,\infty)$ und $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ die Potenzfunktion

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{für } x>0 \text{ und } y=0 \\ 1 & \text{für } x=y=0 \\ y^x & \text{sonst} \end{cases}.$$

Untersuchen Sie bitte, an welchen Stellen die Funktion f stetig ist.

Aufgabe 11: Betrachte $V = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ als normierten Raum mit der euklidischen Norm

$$\|(a_{ij})\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2},$$

und betrachte $U = \{A \in V \mid A \text{ ist symmetrisch}\}$ als metrischen Raum mit der Einschränkung der Metrik von V auf U.
Zeigen Sie bitte, dass die folgende Menge offen in U ist:

$$P = \{A \in U \mid A \text{ ist positiv definit}\}$$

Aufgabe 12: Sei U eine nicht leere, offene und beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, so dass für $x,y\in U$ stets auch $-x \in U$ und $\lambda\cdot x + (1-\lambda)\cdot y \in U$ für $\lambda\in[0,1]$ gilt.
Zeige, dass

$$\|x\| := \inf\left\{\lambda > 0 \,\middle|\, \frac{x}{\lambda} \in U\right\}$$

eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ definiert.