Fachbereich Mathematik | Sommersemester 2017, Blatt 4
Thomas Markwig | Hanna Walach

Analysis 1

Abgabetermin: Montag, 13.11.2017, 12:00

Aufgabe 13: Zeige, ist $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ symmetrisch, so ist

$$||f_A|| = \max\left\{|\lambda| \;\middle|\; \lambda \text{ ist Eigenwert von } A\right\}$$

die Operatornorm von $f_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n : x \mapsto Ax$ bezüglich der euklidischen Norm auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^n$ als Definitions- und Zielbereich von f_A.

Aufgabe 14:

a. Zeige, der Integraloperator $I : \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} : f \mapsto \int_0^1 f(x)\,dx$ ist bezüglich der Maximumsnorm auf $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ gleichmäßig stetig.

b. Zeige, der Differentialoperator $D : \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) : f \longmapsto f'$ ist ein linearer Operator, der bezüglich der Maximumsnorm auf beiden Räumen *nicht* stetig ist.

Aufgabe 15: Sei $\exp : \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$ die Funktion, die jeder Matrix A ihr Matrixexponential e^A zuordnet. Berechne den Wert der Exponentialfunktion für die folgenden beiden Matrizen:

a. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ b. $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 16: Zeige, ist $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ eine in $(0,\ldots,0)^t \in \mathbb{R}^n$ total differenzierbare Abbildung mit der Eigenschaft $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$, so ist f $\mathbb{R}$-linear.