Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig, Jörg Zintl

Winterremester 2017, Blatt 5

Florian Johne, Hanna Walach

Analysis 2 / Mathematik für Physiker 3

Abgabetermin: Montag, 20.11.2017, 12:00

Aufgabe 17:

a. Begründe bitte, weshalb die Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$(r, \theta, \vartheta) \mapsto \big(r \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(\vartheta), r \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\vartheta), r \cdot \sin(\vartheta)\big)$$

total differenzierbar auf $\mathbb{R}^3$ ist und berechne die Ableitung $D\varphi(r, \theta, \vartheta)$. Für welche $(r, \theta, \vartheta)^t \in \mathbb{R}^3$ ist die Matrix $D\varphi(r, \theta, \vartheta)$ invertierbar?

b. Berechne die Ableitung von $f \circ \varphi$ im Punkt $a = (1, 0, \frac{\pi}{2})^t$ für $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} : (x, y, z)^t \mapsto x^2 + y^2 + z^2$ zunächst mit Hilfe der Kettenregel und dann ohne diese.

Aufgabe 18: Betrachte die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) = \begin{cases} \left(1 - \cos\left(\frac{x^2}{y}\right)\right) \cdot \sqrt{x^2 + y^2} & y \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

a. Ist f stetig im Ursprung?

b. Welche Richtungsableitungen von f im Ursprung existieren?

c. Ist f total differenzierbar im Ursprung?

d. Ist f stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}^2$?

Aufgabe 19: Sei $\Delta = D_1^2 + \ldots + D_n^2$ der *Laplace-Operator* und $f \in \mathcal{C}^2((0, \infty), \mathbb{R})$. Zeige, dass für die Funktion $\varphi : \mathbb{R}^n \setminus \{(0, \ldots, 0)^t\} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(||x||_2)$ die Gleichung

$$\Delta\varphi(x) = f''(||x||_2) + \frac{n-1}{||x||_2} \cdot f'(||x||_2) \quad \text{für alle } \ x \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0, \ldots, 0)^t\}$$

gilt und berechne $\Delta\varphi$ für den Fall $f(t) = \frac{1}{t^{n-2}}$ mit $n > 2$.

Aufgabe 20: Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ sei partiell differenzierbar mit beschränkten partiellen Ableitungen. Zeige bitte, dass die Funktion f dann lokal Lipschitz stetig auf U ist.

Hinweis: Verwende auf $\mathbb{R}^2$ die $\| \cdot \|_1$-Norm und wende zweimal den Mittelwertsatz der eindimensionalen Differentialrechung an.