Fachbereich Mathematik | Winterremester 2017, Blatt 8
Thomas Markwig, Jörg Zintl | Florian Johne, Hanna Walach

Analysis 2 / Mathematik für Physiker 3

Abgabetermin: Montag, 10.12.2017, 12:00

Aufgabe 29: Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $f : \overline{U} \to \mathbb{R}^n$ sei stetig auf $\overline{U}$. Zeige, ist f auf U ein lokaler Diffeomorphismus, so besitzt die Funktion

$$g : \overline{U} \to \mathbb{R}, x \mapsto \|f(x)\|$$

ein globales Maximum und dieses wird auf dem Rand ∂U angenommen.

Aufgabe 30: Welcher Punkt in der Verschwindungsmenge $V(x_1^2 + x_2^2 - x_3)$ hat den kleinsten Abstand vom Punkt $\left(1, 1, \frac{1}{2}\right)^t \in \mathbb{R}^3$?

Aufgabe 31: Sei $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ die Einheitskugel und sei

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} : (x, y, z)^t \mapsto a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 - (ax^2 + by^2 + cz^2)^2,$$

mit $a > b > c > 0$. Zeige:

a. $\max\left\{f(x, y, z) \mid (x, y, z)^t \in S\right\} = \frac{1}{4}(a - c)^2$.

b. $\min\left\{f(x, y, z) \mid (x, y, z)^t \in S\right\} = 0$.

Hinweis: Betrachte die folgenden Fälle separat: 1) zwei Variablen sind 0, 2) eine Variable ist 0, 3) keine Variable ist 0.

Aufgabe 32: [Spektralsatz für symmetrische Matrizen]
Sei $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix und $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^t \circ A \circ x = \langle Ax, x\rangle$. Für $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ setzen wir

$$M(Y) = \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 = 1, \langle x, y\rangle = 0 \ \forall\, y \in Y\right\}.$$

a. Zeige, für $i = 1, \ldots, n$ gibt es $y_i \in M(y_1, \ldots, y_{i-1})$ mit $\lambda_i := f(y_i) \overset{!}{=} \max_{x \in M(y_1, \ldots, y_{i-1})} f(x)$.

b. Zeige, es gilt $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$.

c. Zeige $Ay_i = \lambda_i y_i$ für $i = 1, \ldots, n$ mit Hilfe der Lagrange Multiplikatoren.

d. Bestimme alle lokalen Extrema von f unter der Nebenbedingung $\|x\|_2 = 1$.