Fachbereich Mathematik Winterremester 2017, Blatt 11
Thomas Markwig, Jörg Zintl Florian Johne, Hanna Walach

Analysis 2 / Mathematik für Physiker 3

Abgabetermin: Montag, 15.01.2018, 12:00
Aufgabe 44 ist eine Präsenzaufgabe und braucht nicht eingereicht zu werden.

Aufgabe 41: Bestimme die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$x^{(4)}(t) - 2 \cdot \ddot{x}(t) + x(t) = e^t.$$

Aufgabe 42: Für eine rationale Zahl $x = \frac{a}{b}$ mit $a, b > 0$ setzen wir $N(x) = \frac{b}{\mathrm{ggt}(a,b)}$, d.h. $N(x)$ ist der Nenner von x in gekürzter Form und wir setzen $N(0) = 1$. Untersuche die Funktion

$$g : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} : (x,y)^t \mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } x, y \in \mathbb{Q} \text{ mit } N(x) = N(y), \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

bezüglich ihrer Integrierbarkeit auf $[0,1] \times [0,1]$.

Aufgabe 43: Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader. Wir nennen eine Funktion $f : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion, wenn es eine Zerlegung Z von Q gibt, so dass f auf jedem Teilquader von Z konstant ist, und wir nennen die Zerlegung Z dann zu f passend.

a. Zeige, jede Treppenfunktion $f : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ ist Riemann-integrierbar mit

$$\int_Q f(x)\, dx = \sum_{P \in TQ(Z)} c_Q \cdot V(P),$$

wenn Z eine zu f passende Zerlegung ist und c_P der konstante Wert ist, den f auf dem Quader P annimmt.

b. Zeige, ist $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Treppenfunktionen auf Q, die auf Q gleichmäßig gegen eine Funktion $f : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ konvergiert, dann ist auch f Riemann-integrierbar und es gilt

$$\int_Q f(x)\, dx = \lim_{m \to \infty} \int_Q f_m(x)\, dx.$$

Aufgabe 44: Berechne das Integral

$$\int_{[1,2] \times [2,3] \times [0,2]} \frac{2z}{x^2 + 2xy + y^2}\, d(x,y,z).$$