Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig, Jörg Zintl

Wintersemester 2017/18, Blatt 12
Florian Johne, Hanna Walach

Analysis 2 / Mathematik für Physiker 3

Abgabetermin: Montag, 22.01.2018, 12:00

Aufgabe 55: Berechne die folgenden Integrale:

$$\int_{[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,\frac{\pi}{2}]} \sin(x+y)\ d(x,y) \qquad \text{und} \qquad \int_{[0,1]\times[0,1]\times[0,1]} \frac{x^3y^2}{1+z^2}\ d(x,y,z).$$

Aufgabe 56: Zeige, sind $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ auf dem Intervall $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ integrierbar, so ist $f \cdot g$ auf $[a,b] \times [a,b]$ integrierbar und

$$\int_{[a,b]\times[a,b]} f(x)\cdot g(y)\ d(x,y) = \int_a^b f(x)\ dx \cdot \int_a^b g(y)\ dy.$$

Aufgabe 57:

a. Es seien $a, b \in \mathbb{R}^n$ mit $a < b$ und $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ sei integrierbar auf $[a,b]$ und stetig in $c \in [a,b]$ mit $f(c) > 0$. Zeige, $\int_{[a,b]} f(x)\ dx > 0$.

b. Es sei $[a,b]$ ein Intervall in $\mathbb{R}$ und $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$ sei stetig. Zeige,

$$\int_a^b f(x)\ dx \cdot \int_a^b \frac{1}{f(x)}\ dx \geq (b-a)^2.$$

Aufgabe 58: Sei $b \in \mathbb{R}^n$ mit $b > 0$. Sei $f : [0,b] \to \mathbb{R}$ die Funktion $f(x_1,\ldots,x_n) = x_1^3 \cdot \ldots \cdot x_n^3$.

a. Benutze das Riemannsche Integratibilitätskriterium, um zu zeigen, dass f integrierbar auf $[0,b]$ ist.

b. Benutze die Ober- und Untersummen, um das Integral $\int_{[0,b]} f(x)dx$ zu berechnen.