Zusammenfassung

von Kapitel 8 und 9

9. Dezember 2013

Die Definition des Vektorraumes

- K ist ein Körper, dann heißt die Menge $\mathfrak{V}$ K-VR, falls:

Die Definition des Vektorraumes

- K ist ein Körper, dann heißt die Menge $\mathfrak{V}$ K-VR, falls:

1. $\mathfrak{V}$ ist bez. „$+$“ eine abelsche Gruppe.

Die Definition des Vektorraumes

- K ist ein Körper, dann heißt die Menge $\mathfrak{V}$ K-VR, falls:

1. $\mathfrak{V}$ ist bez. „$+$“ eine abelsche Gruppe.
2. $\mathfrak{V}$ ist bez. „$\cdot$“ (Skalarmultiplikation) abgeschlossen:
   $\forall k_1, k_2 \in K, v_1, v_2 \in \mathfrak{V}$ gilt:
   1. $1 \cdot v = v$ (Einselement)

Die Definition des Vektorraumes

- K ist ein Körper, dann heißt die Menge $\mathfrak{V}$ K-VR, falls:

1. $\mathfrak{V}$ ist bez. „+" eine abelsche Gruppe.
2. $\mathfrak{V}$ ist bez. „·" (Skalarmultiplikation) abgeschlossen: $\forall k_1, k_2 \in K, v_1, v_2 \in \mathfrak{V}$ gilt:
   1. $1 \cdot v = v$ (Einselement)
   2. $(k_1 + k_2)\,v = k_1 v + k_2 v$ und $(k_1 \cdot k_2)\,v = k_1 \cdot (k_2 v)$

Die Definition des Vektorraumes

- K ist ein Körper, dann heißt die Menge $\mathcal{V}$ K-VR, falls:

1. $\mathcal{V}$ ist bez. „+“ eine abelsche Gruppe.
2. $\mathcal{V}$ ist bez. „·“ (Skalarmultiplikation) abgeschlossen:
   $\forall k_1, k_2 \in K, v_1, v_2 \in \mathcal{V}$ gilt:
   1. $1 \cdot v = v$ (Einselement)
   2. $(k_1 + k_2)\, v = k_1 v + k_2 v$ und $(k_1 \cdot k_2)\, v = k_1 \cdot (k_2 v)$
   3. $k\,(v_1 + v_2) = kv_1 + kv_2$

Die Definition & Satz des Unterraumes

- $\mathcal{W}$ ist K-VR und $\emptyset \neq \mathcal{U} \subseteq \mathcal{W}$, dann heißt $\mathcal{U}$ ein Unterraum von $\mathcal{W}$, falls gilt:

Die Definition & Satz des Unterraumes

- $\mathfrak{W}$ ist K-VR und $\emptyset \neq \mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{W}$, dann heißt $\mathfrak{U}$ ein Unterraum von $\mathfrak{W}$, falls gilt:
  1. Ist $u_1, u_2 \in \mathfrak{U}$, so ist $u_1 + u_2 \in \mathfrak{U}$

Die Definition & Satz des Unterraumes

- $\mathfrak{V}$ ist K-VR und $\emptyset \neq \mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{V}$, dann heißt $\mathfrak{U}$ ein Unterraum von $\mathfrak{V}$, falls gilt:
  1. Ist $u_1, u_2 \in \mathfrak{U}$, so ist $u_1 + u_2 \in \mathfrak{U}$
  2. Ist $u \in \mathfrak{U}$, $k \in K$, so ist $ku \in \mathfrak{U}$

Die Definition & Satz des Unterraumes

- $\mathcal{W}$ ist K-VR und $\emptyset \neq \mathcal{U} \subseteq \mathcal{W}$, dann heißt $\mathcal{U}$ ein Unterraum von $\mathcal{W}$, falls gilt:
  1. Ist $u_1, u_2 \in \mathcal{U}$, so ist $u_1 + u_2 \in \mathcal{U}$
  2. Ist $u \in \mathcal{U}$, $k \in K$, so ist $ku \in \mathcal{U}$
- Gilt $\mathcal{U}_i \subseteq \mathcal{W}$ für $i \in I$, so ist $\bigcap_{i \in I} U_i$ ein UR von $\mathcal{W}$

Die Definition & Satz des Unterraumes

- $\mathfrak{V}$ ist K-VR und $\emptyset \neq \mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{V}$, dann heißt $\mathfrak{U}$ ein Unterraum von $\mathfrak{V}$, falls gilt:
  1. Ist $u_1, u_2 \in \mathfrak{U}$, so ist $u_1 + u_2 \in \mathfrak{U}$
  2. Ist $u \in \mathfrak{U}$, $k \in K$, so ist $ku \in \mathfrak{U}$
- Gilt $\mathfrak{U}_i \subseteq \mathfrak{V}$ für $i \in I$, so ist $\bigcap_{i \in I} U_i$ ein UR von $\mathfrak{V}$
- Sind U_1, U_2 UR von $\mathfrak{V}$, dann ist $U_1 \cup U_2$ ein UR von $\mathfrak{V}$, wenn $U_1 \subseteq U_2$ *oder* $U_2 \subseteq U_1$

Die Definition & Satz des Unterraumes

Weitere Rechenregeln für den K-VR $\mathcal{V}$:

- Für $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{V}$ ist $< \mathcal{M} >= \bigcap \mathcal{U}$ das Erzeugnis von $\mathcal{M}$ in $\mathcal{U}$

Die Definition & Satz des Unterraumes

Weitere Rechenregeln für den K-VR $\mathfrak{W}$:

- Für $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{W}$ ist $< \mathfrak{M} > = \bigcap \mathfrak{U}$ das Erzeugnis von $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{U}$
- $\mathfrak{W} = < \mathfrak{M} > \mid \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{W}$ heißt $\mathfrak{M}$ Erzeugendensystem von $\mathfrak{W}$

Die Definition & Satz des Unterraumes

Weitere Rechenregeln für den K-VR $\mathcal{V}$:

- Für $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{V}$ ist $<\mathcal{M}> = \bigcap \mathcal{U}$ das Erzeugnis von $\mathcal{M}$ in $\mathcal{U}$
- $\mathcal{V} = <\mathcal{M}> \mid \mathcal{M} \subseteq \mathcal{V}$ heißt $\mathcal{M}$ Erzeugendensystem von $\mathcal{V}$
- Ist $\mathcal{M} \subset \mathcal{V}$, so ist

$$<\mathcal{M}> = \left\{ \sum_{j=0}^{n} k_j m_j \;\middle|\; m_j \in \mathcal{M}, k_j \in K, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Die Definition & Satz des Unterraumes

Weitere Rechenregeln für den K-VR $\mathcal{W}$:

- Für $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{W}$ ist $<\mathcal{M}>= \bigcap \mathcal{U}$ das Erzeugnis von $\mathcal{M}$ in $\mathcal{U}$
- $\mathcal{W} =<\mathcal{M}> \mid \mathcal{M} \subseteq \mathcal{W}$ heißt $\mathcal{M}$ Erzeugendensystem von $\mathcal{W}$
- Ist $\mathcal{M} \subset \mathcal{W}$, so ist
  $$<\mathcal{M}>= \left\{ \sum_{j=0}^{n} k_j m_j \mid m_j \in \mathcal{M}, k_j \in K, n \in \mathbb{N} \right\}$$
- Für $\mathcal{U}_1, \ldots \mathcal{U}_k \subseteq \mathcal{W}$ gilt:
  $$< U_1 \cap \cdots \cap \mathcal{U}_k >=< \mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_k >= \mathcal{U}_1 + \cdots + \mathcal{U}_k$$

Die Definition & Satz des Unterraumes

Weitere Rechenregeln für den K-VR $\mathcal{V}$:

- Für $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{V}$ ist $< \mathcal{M} >= \bigcap \mathcal{U}$ das Erzeugnis von $\mathcal{M}$ in $\mathcal{U}$
- $\mathcal{V} =< \mathcal{M} > \mid \mathcal{M} \subseteq \mathcal{V}$ heißt $\mathcal{M}$ Erzeugendensystem von $\mathcal{V}$
- Ist $\mathcal{M} \subset \mathcal{V}$, so ist
  $$< \mathcal{M} >= \left\{ \sum_{j=0}^{n} k_j m_j \mid m_j \in \mathcal{M}, k_j \in K, n \in \mathbb{N} \right\}$$
- Für $\mathcal{U}_1, \ldots \mathcal{U}_k \subseteq \mathcal{V}$ gilt:
  $< U_1 \cap \cdots \cap \mathcal{U}_k >=< \mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_k >= \mathcal{U}_1 + \cdots + \mathcal{U}_k$
- $\mathcal{V}$ heißt endlich erzeugbar, falls $\exists\, \mathcal{V} \supseteq \mathcal{M} = \{v_1, \ldots, v_n\}$,
  $n < \infty$ mit $\mathcal{V} =< \mathcal{M} >$, also $\mathcal{V} = \left\{ \sum_{j=1}^{n} k_j v_j \middle| \; k_j \in K \right\}$

Lineare Unabhängigkeit, Basen und Dimensionen

- $\left(v_i \mid i \in I\right)$ ist lin. unabh., falls $\sum_{j \in J} k_j v_j = 0 \Leftrightarrow k_i = 0$

Lineare Unabhängigkeit, Basen und Dimensionen

- $\left(v_i \mid i \in I\right)$ ist lin. unabh., falls $\sum\limits_{j \in J} k_j v_j = 0 \Leftrightarrow k_i = 0$
- $\mathfrak{B}$ heißt eine Basis von $\mathfrak{V}$, wenn $\mathfrak{B}$ linear unabh. ist und $\mathfrak{V}$ vollständig durch $\mathfrak{B}$ erzeugt wird: $v = \sum\limits_{j \in J} k_j v_j$

Lineare Unabhängigkeit, Basen und Dimensionen

- $\left(v_i \mid i \in I\right)$ ist lin. unabh., falls $\sum\limits_{j \in J} k_j v_j = 0 \Leftrightarrow k_i = 0$
- $\mathfrak{B}$ heißt eine Basis von $\mathfrak{V}$, wenn $\mathfrak{B}$ linear unabh. ist und $\mathfrak{V}$ vollständig durch $\mathfrak{B}$ erzeugt wird: $v = \sum\limits_{j \in J} k_j v_j$
- Basen müssen nicht eindeutig sein (Steinitz'scher Austauschsatz)

Lineare Unabhängigkeit, Basen und Dimensionen

- $(v_i \mid i \in I)$ ist lin. unabh., falls $\sum\limits_{j \in J} k_j v_j = 0 \Leftrightarrow k_i = 0$
- $\mathcal{B}$ heißt eine Basis von $\mathcal{V}$, wenn $\mathcal{B}$ linear unabh. ist und $\mathcal{V}$ vollständig durch $\mathcal{B}$ erzeugt wird: $v = \sum\limits_{j \in J} k_j v_j$
- Basen müssen nicht eindeutig sein (Steinitz'scher Austauschsatz)
- $|\mathcal{V}| = |\mathcal{B}| = n$ ist die Dimension von $\mathcal{V}$ und bez. die Anzahl der lin. u. Elemente in $\mathcal{V}$ und kann endlich oder ∞-groß sein