Mengen und Abbildungen

Klaus Doerk

17. November 1989

Übersicht

- Was ist eine Menge
- Beispiele von Mengen
- Aussagen und Wahrheitstafeln
- Mengenoperationen
- Rechenregeln für Mengen

Was ist eine Menge?

- „Unter einer Menge versteht man jede Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.“(Cantor 1845-1918)
- Elemente: Objekte, die zu einer Menge gehören ($a \in Menge\ M$ bzw. $b \notin M$)
- Beschreibung von Mengen: Elemente in geschweiften Klammern angeben

Beispiele

Beispiel

1. $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$ heißt Menge der natürlichen Zahlen
2. $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, ...\}$ heißt Menge der ganzen Zahlen
3. $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \big| a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$ heißt Menge der rationalen Zahlen.
4. $\mathbb{R}$ heißt Menge der reellen Zahlen (Punkte auf der „Zahlengeraden“)
5. $\{x \in \mathbb{N} \big| \; x \text{ ist Teiler von } 6\} = \{1, 2, 3, 6\} = \{6, 2, 1, 3\} = \{1, 2, 6, 2, 3, 1\} = ... = \{x \in \mathbb{N} \big| \; x \leq 6, x \neq 4, \neq 5\}$ beschreibt die Menge aller natürlichen Zahlen, die durch 6 teilbar sind.

Aussagen und Wahrheitstafeln

- Seien X, Y Aussagen $\Rightarrow$ Neue Aussagen erhält man durch Wahrheitstafeln

Aussagen und Wahrheitstafeln

- Seien X, Y Aussagen $\Rightarrow$ Neue Aussagen erhält man durch Wahrheitstafeln

X	Y	nicht X	X und Y	X oder Y	X $\Rightarrow$	X $\Leftrightarrow$ Y
w	w	f	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w	f
f	f	w	f	f	w	w

Mengenoperationen

Seien A, B Mengen

Operationen

- A Teilmenge von B, wenn $a \in A \Rightarrow \; a \in B$ ($A \subseteq B$)

Mengenoperationen

Seien A, B Mengen

Operationen

- A Teilmenge von B, wenn $a \in A \Rightarrow \ a \in B$ ($A \subseteq B$)
- A echte Teilmenge von B , wenn $A \subseteq B$ und $A \neq B$ ($A \subsetneq B$)

Mengenoperationen

Seien A, B Mengen

Operationen

- A Teilmenge von B, wenn $a \in A \Rightarrow \; a \in B$ ($A \subseteq B$)
- A echte Teilmenge von B , wenn $A \subseteq B$ und $A \neq B$ ($A \subsetneq B$)
- leeren Menge$=\emptyset$ (stets Teilmenge einer Menge)

Seien A, B Mengen

Operationen

- A Teilmenge von B, wenn $a \in A \Rightarrow \; a \in B$ ($A \subseteq B$)
- A echte Teilmenge von B , wenn $A \subseteq B$ und $A \neq B$ ($A \subsetneq B$)
- leeren Menge$=\emptyset$ (stets Teilmenge einer Menge)
- $A \cap B = \{x \big| \; x \in A \; \textit{und} \; x \in B\}$ heißt Durchschnitt

Mengenoperationen

Seien A, B Mengen

Operationen

- A Teilmenge von B, wenn $a \in A \Rightarrow \; a \in B$ ($A \subseteq B$)
- A echte Teilmenge von B , wenn $A \subseteq B$ und $A \neq B$ ($A \subsetneq B$)
- leeren Menge$=\emptyset$ (stets Teilmenge einer Menge)
- $A \cap B = \{x \big|\; x \in A \; \textit{und} \; x \in B\}$ heißt Durchschnitt
- $A \cup B = \{x \big|\; x \in A \; \textit{oder} \; x \in B\}$ heißt Vereinigung

Mengenoperationen

Seien A, B Mengen

Operationen

- A Teilmenge von B, wenn $a \in A \Rightarrow \ a \in B$ ($A \subseteq B$)
- A echte Teilmenge von B , wenn $A \subseteq B$ und $A \neq B$ ($A \subsetneq B$)
- leeren Menge$=\emptyset$ (stets Teilmenge einer Menge)
- $A \cap B = \{x | \ x \in A \textit{ und } x \in B\}$ heißt Durchschnitt
- $A \cup B = \{x | \ x \in A \textit{ oder } x \in B\}$ heißt Vereinigung
- $A \setminus B = \{x | \ x \in A \textit{ und } x \notin B\}$ heißt Differenzmenge

Mengenoperationen

Seien A, B Mengen

Operationen

- A Teilmenge von B, wenn $a \in A \Rightarrow \ a \in B$ ($A \subseteq B$)
- A echte Teilmenge von B , wenn $A \subseteq B$ und $A \neq B$ ($A \subsetneq B$)
- leeren Menge$=\emptyset$ (stets Teilmenge einer Menge)
- $A \cap B = \{x \mid x \in A \ \mathit{und} \ x \in B\}$ heißt Durchschnitt
- $A \cup B = \{x \mid x \in A \ \mathit{oder} \ x \in B\}$ heißt Vereinigung
- $A \setminus B = \{x \mid x \in A \ \mathit{und} \ x \notin B\}$ heißt Differenzmenge
- Sei $B \subseteq A$. Wir definieren das Komplement von B durch $\overline{B} = \{x \mid x \in A \text{ und } \ x \notin B\} = A \setminus B$

Mengenoperationen

Seien A, B Mengen

Operationen

- A Teilmenge von B, wenn $a \in A \Rightarrow \; a \in B$ ($A \subseteq B$)
- A echte Teilmenge von B , wenn $A \subseteq B$ und $A \neq B$ ($A \subsetneq B$)
- leeren Menge$=\emptyset$ (stets Teilmenge einer Menge)
- $A \cap B = \{x \mid x \in A \textit{ und } x \in B\}$ heißt Durchschnitt
- $A \cup B = \{x \mid x \in A \textit{ oder } x \in B\}$ heißt Vereinigung
- $A \setminus B = \{x \mid x \in A \textit{ und } x \notin B\}$ heißt Differenzmenge
- Sei $B \subseteq A$. Wir definieren das Komplement von B durch $\overline{B} = \{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\} = A \setminus B$
- Ist $A \cap B = \emptyset$, so heißen A und B disjunkt oder elementfremd

Mengenoperationen

Seien A, B Mengen

Operationen

- A Teilmenge von B, wenn $a \in A \Rightarrow \ a \in B$ ($A \subseteq B$)
- A echte Teilmenge von B , wenn $A \subseteq B$ und $A \neq B$ ($A \subsetneq B$)
- leeren Menge$=\emptyset$ (stets Teilmenge einer Menge)
- $A \cap B = \{x |\ x \in A \ \textit{und} \ x \in B\}$ heißt Durchschnitt
- $A \cup B = \{x |\ x \in A \ \textit{oder} \ x \in B\}$ heißt Vereinigung
- $A \setminus B = \{x |\ x \in A \ \textit{und} \ x \notin B\}$ heißt Differenzmenge
- Sei $B \subseteq A$. Wir definieren das Komplement von B durch $\overline{B} = \{x |\ x \in A \text{ und } \ x \notin B\} = A \setminus B$
- Ist $A \cap B = \emptyset$, so heißen A und B disjunkt oder elementfremd
- Menge aller Teilmengen heißt die Potenzmenge von A $(\mathcal{P}(A))$

Wie können wir jetzt mit unseren eingeführten Operationen rechnen??

Wie können wir jetzt mit unseren eingeführten Operationen rechnen??

Satz: Rechenregeln

1. Kommutativgesetz: $A \cap B = B \cap A$ und $A \cup B = B \cup A$
2. Assoziativgesetz: $\begin{cases} A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \\ A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \end{cases}$
3. Distributivgesetz: $\begin{cases} A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{cases}$

Beweis

Beweis siehe Tafel