Moduln über Hauptidealbereichen (HIB)

Präsentation zum Skript-Abschnitt

Max Mustermann[1]

[1]TU Kaiserslautern

September–Dezember 2013

Überblick

Wir stellen in dieser Präsentation einige wichtige Resultate über Moduln über HIB dar:

Überblick

Wir stellen in dieser Präsentation einige wichtige Resultate über Moduln über HIB dar:

- Die Charakterisierung von HIB durch ihre Moduln.

Überblick

Wir stellen in dieser Präsentation einige wichtige Resultate über Moduln über HIB dar:

- Die Charakterisierung von HIB durch ihre Moduln.
- Das Verhalten von Torsion von Moduln über HIB.

Überblick

Wir stellen in dieser Präsentation einige wichtige Resultate über Moduln über HIB dar:

- Die Charakterisierung von HIB durch ihre Moduln.
- Das Verhalten von Torsion von Moduln über HIB.
- Diverse Zerlegungssätze für endlich erzeugte Moduln über HIB.

Überblick

Wir stellen in dieser Präsentation einige wichtige Resultate über Moduln über HIB dar:

- Die Charakterisierung von HIB durch ihre Moduln.
- Das Verhalten von Torsion von Moduln über HIB.
- Diverse Zerlegungssätze für endlich erzeugte Moduln über HIB.
- Den Hauptsatz über endlich erzeugte Moduln über HIB.

Überblick

Wir stellen in dieser Präsentation einige wichtige Resultate über Moduln über HIB dar:

- Die Charakterisierung von HIB durch ihre Moduln.
- Das Verhalten von Torsion von Moduln über HIB.
- Diverse Zerlegungssätze für endlich erzeugte Moduln über HIB.
- Den Hauptsatz über endlich erzeugte Moduln über HIB.

Aufbauend auf diesen Resultaten kann z.B. die Theorie der Jordan'schen Normfalform entwickelt werden.

Überblick

Wir stellen in dieser Präsentation einige wichtige Resultate über Moduln über HIB dar:

- Die Charakterisierung von HIB durch ihre Moduln.
- Das Verhalten von Torsion von Moduln über HIB.
- Diverse Zerlegungssätze für endlich erzeugte Moduln über HIB.
- Den Hauptsatz über endlich erzeugte Moduln über HIB.

Aufbauend auf diesen Resultaten kann z.B. die Theorie der Jordan'schen Normfalform entwickelt werden.

Als Beispiele verwenden wir durchweg abelsche Gruppen, welche nichts anderes als $\mathbb{Z}$-Moduln sind.

Charakterisierung von HIB

Wir kennen bereits einige Eigenschaften von Ringen die sich durch ihre Moduln charakterisieren lassen.

Charakterisierung von HIB

Wir kennen bereits einige Eigenschaften von Ringen die sich durch ihre Moduln charakterisieren lassen.

Beispiel

Ein Ring ist genau dann noethersch, wenn jeder endlich erzeugte Modul über ihm noethersch ist.

Charakterisierung von HIB

Wir kennen bereits einige Eigenschaften von Ringen die sich durch ihre Moduln charakterisieren lassen.

Beispiel

Ein Ring ist genau dann noethersch, wenn jeder endlich erzeugte Modul über ihm noethersch ist.

Unter Verwendung des Wohlordnungssatzes lässt sich zeigen, dass für HIB die folgende Charakterisierung existiert:

Charakterisierung von HIB

Wir kennen bereits einige Eigenschaften von Ringen die sich durch ihre Moduln charakterisieren lassen.

Beispiel

Ein Ring ist genau dann noethersch, wenn jeder endlich erzeugte Modul über ihm noethersch ist.

Unter Verwendung des Wohlordnungssatzes lässt sich zeigen, dass für HIB die folgende Charakterisierung existiert:

Satz

Ein Ring ist genau dann ein HIB, wenn jeder Untermodul eines freien Moduls über ihm wiederum frei ist.

Torsion von Moduln über HIB

Wir wissen im Falle von Moduln über Integritätsbereichen bereits, dass jeder freie Modul auch torsionsfrei ist. Im Fall von Moduln über HIB lässt sich das folgende Resultat beweisen:

Torsion von Moduln über HIB

Wir wissen im Falle von Moduln über Integritätsbereichen bereits, dass jeder freie Modul auch torsionsfrei ist. Im Fall von Moduln über HIB lässt sich das folgende Resultat beweisen:

Satz

Ein endlich erzeugter Modul über einem HIB ist genau dann frei wenn er torsionsfrei ist.

Torsion von Moduln über HIB

Wir wissen im Falle von Moduln über Integritätsbereichen bereits, dass jeder freie Modul auch torsionsfrei ist. Im Fall von Moduln über HIB lässt sich das folgende Resultat beweisen:

Satz

Ein endlich erzeugter Modul über einem HIB ist genau dann frei wenn er torsionsfrei ist.

Diese Aussage ist für nicht endlich erzeugte Moduln im Allgemeinen falsch. Als klassisches Gegenbeispiel dient:

Torsion von Moduln über HIB

Wir wissen im Falle von Moduln über Integritätsbereichen bereits, dass jeder freie Modul auch torsionsfrei ist. Im Fall von Moduln über HIB lässt sich das folgende Resultat beweisen:

Satz

Ein endlich erzeugter Modul über einem HIB ist genau dann frei wenn er torsionsfrei ist.

Diese Aussage ist für nicht endlich erzeugte Moduln im Allgemeinen falsch. Als klassisches Gegenbeispiel dient:

Gegenbeispiel

Die abelsche Gruppe $\mathbb{Q}$ ist torsionsfrei, besitzt jedoch kein freies Erzeugendensystem.

Erster Zerlegungssatz

Jeder endlich erzeugte Modul über einem HIB lässt sich als direkte Summe seiner Torsion und eines freien Anteils schreiben.

Erster Zerlegungssatz

Jeder endlich erzeugte Modul über einem HIB lässt sich als direkte Summe seiner Torsion und eines freien Anteils schreiben.

Erster Zerlegungssatz

Ist M ein endlich erzeugter Modul über einem HIB R so ist M von der Form:

$$M = T(M) \oplus F,$$

wobei F frei ist mit $F \cong M/T(M)$. Es ist $rank_R(F)$ eindeutig durch M bestimmt.

Erster Zerlegungssatz

Jeder endlich erzeugte Modul über einem HIB lässt sich als direkte Summe seiner Torsion und eines freien Anteils schreiben.

Erster Zerlegungssatz

Ist M ein endlich erzeugter Modul über einem HIB R so ist M von der Form:

$$M = T(M) \oplus F,$$

wobei F frei ist mit $F \cong M/T(M)$. Es ist $rank_R(F)$ eindeutig durch M bestimmt.

Wie bei der Torsion ist hier die Bedingung, dass M endlich erzeugt ist, tatsächlich notwendig.

Erster Zerlegungssatz

Jeder endlich erzeugte Modul über einem HIB lässt sich als direkte Summe seiner Torsion und eines freien Anteils schreiben.

Erster Zerlegungssatz

Ist M ein endlich erzeugter Modul über einem HIB R so ist M von der Form:

$$M = T(M) \oplus F,$$

wobei F frei ist mit $F \cong M/T(M)$. Es ist $rank_R(F)$ eindeutig durch M bestimmt.

Wie bei der Torsion ist hier die Bedingung, dass M endlich erzeugt ist, tatsächlich notwendig.

Gegenbeispiel

Die Gruppe $\prod_{i \in \mathbb{N}_{>0}} \mathbb{Z}/p^{2^i}\mathbb{Z}$ mit $p \in \mathbb{P}$ besitzt keine Darstellung wie oben.

Zweiter Zerlegungssatz

Um Torsionsmodule besser zu verstehen führt man für ein Primelement $p \in R$ die sogenannte p-Torsion eines Torsionsmoduls M ein:

Zweiter Zerlegungssatz

Um Torsionsmodule besser zu verstehen führt man für ein Primelement $p \in R$ die sogenannte p-Torsion eines Torsionsmoduls M ein:

$$M(p) = \{m \in M \mid \exists n \in \mathbb{N} : p^n \cdot m = 0\}$$

Zweiter Zerlegungssatz

Um Torsionsmodule besser zu verstehen führt man für ein Primelement $p \in R$ die sogenannte p-Torsion eines Torsionsmoduls M ein:

$$M(p) = \{m \in M \mid \exists n \in \mathbb{N} : p^n \cdot m = 0\}$$

Der zweite Zerlegungssatz besagt nun folgendes:

Zweiter Zerlegungssatz

Um Torsionsmodule besser zu verstehen führt man für ein Primelement $p \in R$ die sogenannte p-Torsion eines Torsionsmoduls M ein:

$$M(p) = \{m \in M \mid \exists n \in \mathbb{N} : p^n \cdot m = 0\}$$

Der zweite Zerlegungssatz besagt nun folgendes:

Zweiter Zerlegungssatz

Ist M ein endlich erzeugter Torsionsmodul über einem HIB R, so gibt es Primelemente $p_1, \dots, p_n \in R$ mit:

$$M = \bigoplus_{i=1}^{n} M(p_i).$$

Die Primelemente in dieser Zerlegung sind dann eindeutig bestimmt.

Dritter Zerlegungssatz

Die Module $M(p)$ der p-Torsion können wiederum aufgespalten werden in eine direkte Summe von Quotienten des Ringes R.

Dritter Zerlegungssatz

Die Module $M(p)$ der p-Torsion können wiederum aufgespalten werden in eine direkte Summe von Quotienten des Ringes R.

Dritter Zerlegungssatz

Ist M ein endlich erzeugter Torsionsmodul über einem HIB R, und gibt es ein $p \in R$ mit $p^l M = 0$, aber $p^{l-1} M \neq 0$. Dann gibt es ein $k \in \mathbb{N}$, sodass es für $j = 1, \ldots, k$, Zahlen $a_j \in \mathbb{N}$ gibt mit $a_j \leq l$ und:

$$M \cong \bigoplus_{j=1}^{n} R/p^{a_j} R.$$

In dieser Situation sind k und die a_j eindeutig durch M bestimmt.

Der Hauptsatz

Insgesamt ergibt sich das folgende Resultat:

Hauptsatz über endlich erzeugte Moduln über HIB

Ist M ein endlich erzeugter Modul über einem HIB R, so ist M von der Form:

$$M = R^n \oplus \bigoplus_{i=1}^{k} Rm_i$$

wobei $Rm_i \cong R/p_i^{a_i}R$ ist mit Primelementen $p_i \in R$.
Das Tupel:

$$(n, p_1^{a_i}, \ldots, p_k^{a_k})$$

bestimmt M bis auf Isomorphie eindeutig und wird der Typ von M genannt.