Fachbereich Mathematik — Wintersemester 2016/17, Blatt 0
Thomas Markwig

Kommutative Algebra

Präsenzaufgabe 1: Wir nennen ein Ideal I im Polynomring $K[\underline{x}] = K[x_1, \ldots, x_n]$ ein *monomiales Ideal*, wenn I von Monomen erzeugt wird.
Für zwei Monome $\underline{x}^\alpha$ und $\underline{x}^\beta$ sagen wir, $\underline{x}^\alpha$ *teilt* $\underline{x}^\beta$, wenn es ein Monom $\underline{x}^\gamma$ gibt, so daß $\underline{x}^\alpha \cdot \underline{x}^\gamma = \underline{x}^\beta$ gilt, d.h. $\alpha_i \leq \beta_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$.
Zudem definieren wir das *kleinste gemeinsame Vielfache* von $\underline{x}^\alpha$ und $\underline{x}^\beta$ als

$$\operatorname{lcm}\left(\underline{x}^\alpha, \underline{x}^\beta\right) = x_1^{\max\{\alpha_1,\beta_1\}} \cdots x_n^{\max\{\alpha_n,\beta_n\}},$$

d.h. es ist das Monom kleinsten Grades, das von beiden Monomen geteilt wird.

a. Zeige, für ein Ideal I sind die folgenden Eigenschaften äquivalent:

   (1) I ist ein monomiales Ideal.

   (2) Für jedes $f \in I$ sind alle in f vorkommenden Monome in I enthalten.

   (3) Es gibt ein Erzeugendensystem B von I, so daß für jedes $f \in B$ auch alle Monome von f in I liegen.

b. Wenn $I = \langle \underline{x}^\alpha \mid \alpha \in \Lambda \rangle$ und $\underline{x}^\beta \in I$ gilt, dann gibt es ein $\alpha \in \Lambda$ mit $\underline{x}^\alpha$ teilt $\underline{x}^\beta$.

c. Seien $I = \langle \underline{x}^\alpha \mid \alpha \in \Lambda \rangle$ und $J = \langle \underline{x}^\beta \mid \beta \in \Lambda' \rangle$ zwei monomiale Ideale in $K[\underline{x}]$. Zeige,

$$I \cap J = \left\langle \operatorname{lcm}\left(\underline{x}^\alpha, \underline{x}^\beta\right) \;\middle|\; \alpha \in \Lambda, \beta \in \Lambda' \right\rangle$$

und

$$I : \langle \underline{x}^\gamma \rangle = \left\langle \frac{\operatorname{lcm}(\underline{x}^\alpha, \underline{x}^\gamma)}{\underline{x}^\gamma} \;\middle|\; \alpha \in \Lambda \right\rangle.$$

Hinweis für Teil c., zeige zunächst, daß beide Ideale monomiale Ideale sind.

Präsenzaufgabe 2: Wir führen nun einige grundlegende SINGULAR-Befehle ein.
In SINGULAR können wir mit zwei Arten von Ringen arbeiten, die wir bisher in der Vorlesung eingeführt haben, Polynomringe $K[x_1, \ldots, x_n]$ und Potenzreihenringe $K[[x_1, \ldots, x_n]]$.
Der Polynomring $\mathbb{Q}[x, y, z]$ wird in SINGULAR definiert als:

```
ring r=0,(x,y,z),dp;
```

Hierbei steht 0 für die Charakteristik von $\mathbb{Q}$ und `dp` für einen **P**olynomring.
Der Potenzreihenring $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}[[x_1, \ldots, x_4]]$ wird in SINGULAR definiert als:

```
ring r=5,(x(1..4)),ds;
```

Hierbei steht 5 für die Charakteristik von $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ und ds besagt, daß wir mit einem Potenzreihenring (auf Englisch power **s**eries ring) arbeiten — wenn man sehr exakt ist, stimmt das nicht ganz, aber dazu mehr, wenn wir den Begriff der *Lokalisierung* kennengelernt haben.
Sobald wir die Ringe festgelegt haben, können wir Polynome und Ideale definieren und mit ihnen arbeiten:

```
LIB "all.lib";      // lädt die benötigten Bibliotheken
ring r=0,(x,y,z),dp;
poly f=x^3*y+5*z^2;
poly g=3x2y-xz2;    // Kurzschreibweise für 3*x^2*y-x*z^2
ideal I=f,g,x2y;
ideal J=x+y;
I*J;                // Produkt von I und J
intersect(I,J);     // Durchschnitt der beiden Ideale
quotient(I,J);      // berechnet den Idealquotienten
radical(I);         // berechnet das Radikal von I
I=std(I);           // ersetzt die Erzeuger von I durch bessere
reduce(f,I);        // überprüft, ob f in I liegt
reduce(J,I);        // überprüft, ob J in I enthalten ist
```

Betrachte die die Ideale $I = \langle x^2y^5, x^6, y^2\rangle$ und $J = \langle x^2y, xy^4\rangle$. Führe die folgenden Berechnungen mit Hilfe von SINGULAR aus:

a. $I \cap J$.

b. $I \cdot J$.

c. $I : \langle x^3y^6\rangle$.

d. $\sqrt{I}$.

e. Überprüfe, ob $x^7 + xy^8$ in I liegt.

Verifiziere die Ergebnisse ohne die Hilfe von SINGULAR.

Präsenzaufgabe 3: Welche der folgenden Ideale sind monomiale Ideale?

a. $I = \langle x^2y - y^3, x^3\rangle \lhd \mathbb{Q}[x, y, z]$.

b. $I = \langle x^4 - x^2y^2 + y^4, 2x^3 - xy^2, 2y^3 - x^2y\rangle \lhd \mathbb{Q}[x, y, z]$

c. $I = \langle x^{12}y^7 + x^9y + xyz^3 + yz^3, x^8 - xyz, yz^3, x^8 - yz^3, x^{12}y^7\rangle \lhd \mathbb{Q}[x, y, z]$.