Thomas Markwig

Kommutative Algebra

Abgabe: Donnerstag, 20/10/16, 10:00 Uhr

Aufgabe 1: Sei $0 \neq f = \sum_{|\alpha|=0}^{m} a_\alpha \underline{x}^\alpha \in R[x_1, \ldots, x_n]$ der Polynomring über dem Ring R. Wir erinnern uns,

$$\deg(f) := \max\{|\alpha| \mid a_\alpha \neq 0\}$$

ist der *Grad* von f, wobei $\deg(0) = -\infty$. Zeige für $f, g \in R[x_1, \ldots, x_n]$:

a. $\deg(f + g) \leq \max\{\deg(f), \deg(g)\}$,

b. $\deg(f \cdot g) \leq \deg(f) + \deg(g)$,

c. $\deg(f \cdot g) = \deg(f) + \deg(g)$, wenn R ein Integritätsbereich ist.

Beachte, R ist ein Integritätsbereich, wenn $r \cdot r' = 0$ für $r, r' \in R$ stets $r = 0$ oder $r' = 0$ impliziert.

Aufgabe 2: Sei K ein Ring, $d \in \mathbb{N}$ und

$$K[x_1, \ldots, x_n]_d = \left\{ \sum_{|\alpha|=\alpha_1+\ldots+\alpha_n=d} a_\alpha \cdot x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \;\middle|\; a_\alpha \in K \right\}.$$

Wir nennen die Elemente von $K[x_1, \ldots, x_n]_d$ homogen vom Grad d.

a. Zeige, daß jedes Polynom $0 \neq f \in K[x_1, \ldots, x_n]$ vom Grad d eine eindeutige Zerlegung $f = f_0 + \ldots + f_d$ mit $f_i \in K[x_1, \ldots, x_n]_i$ besitzt. Wir nennen die f_i die *homogenen Bestandteile* von f.

b. Ein Ideal $I \trianglelefteq K[x_1, \ldots, x_n]$ heißt *homogen*, wenn für jedes $f \in I$ auch seine homogenen Bestandteile in I liegen. Zeige, I ist genau dann homogen, wenn I von homogenen Elementen erzeugt wird.

Aufgabe 3: **[Der Körper $K\{\{t\}\}$]**

a. Wir nennen $A \subset \mathbb{R}$ *geeignet*, wenn A abzählbar unendlich und nach unten beschränkt ist und keinen Häufungspunkt hat. Zudem bezeichne

$$\mathcal{A} := \{A \subset \mathbb{R} \mid \text{ A ist geeignet}\}$$

die Menge der geeigneten Teilmengen von $\mathbb{R}$.

Zeige für $A, B \in \mathcal{A}$:

$$A + B := A \cup B \in \mathcal{A} \quad \text{und} \quad A * B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\} \in \mathcal{A}.$$

b. Für einen beliebigen Körper K betrachten wir die Menge

$$K\{\{t\}\} := \{f : \mathbb{R} \to K \mid \exists\, A \in \mathcal{A} \;:\; f(\alpha) = 0 \;\forall\, \alpha \notin A\}.$$

Wir definieren zwei zwei-stellige Operationen auf $K\{\{t\}\}$:

$$f + g : \mathbb{R} \to K : \alpha \mapsto f(\alpha) + g(\alpha)$$

und

$$f * g : \mathbb{R} \to K : \alpha \mapsto \sum_{\gamma \in \mathbb{R}} f(\alpha - \gamma) \cdot g(\gamma),$$

beachte dabei, für ein festes α sind nur endlich viele Summanden nicht null!

Zeige, daß $(K\{\{t\}\}, +, *)$ ein Körper ist.

Hinweis für Teil b., zeige zunächst, daß $(K\{\{t\}\}, +)$ eine Untergruppe von $(K^{\mathbb{R}}, +)$ ist. Der schwierige Teil besteht darin, zu zeigen, daß jedes Element in $K\{\{t\}\}$, das nicht null ist, ein Inverses besitzt. Dazu betrachte man zunächst den Fall $f(\alpha) = 0$ für $\alpha < 0$ und $f(0) = 1$, und verwende dann die geometrische Reihe.

Bemerkung

Für eine Folge $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ reller Zahlen schreiben wir

$$\alpha_n \nearrow \infty \quad :\Longleftrightarrow \quad (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist streng monoton wachsend und unbeschränkt,}$$

und setzen $\mathbb{A} := \{(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \alpha_n \nearrow \infty\}$. Die folgende Abbildung ist bijektiv:

$$\Phi : \mathbb{A} \longrightarrow \mathcal{A} : (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \{\alpha_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Für $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$ definieren wir eine Funktion

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot t^{\alpha_n} : \mathbb{R} \longrightarrow K : \alpha \mapsto \begin{cases} a_n, & \text{wenn } \alpha = \alpha_n, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir verwenden die “Reihe” also, um die Werte einer Funktion in einfacher Weise zu speichern; der Wert der Funktion an Stelle α_n ist gerade der Koeffizient vor t^{α_n}. Damit gilt dann

$$\begin{aligned} K\{\{t\}\} &= \Big\{ f : \mathbb{R} \to K \;\Big|\; \exists\, \alpha_n \nearrow \infty \;:\; f(\alpha) = 0 \;\forall\, \alpha \notin \{\alpha_n \mid n \in \mathbb{N}\} \Big\} \\ &= \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot t^{\alpha_n} \;\middle|\; \alpha_n \nearrow \infty, a_n \in K \right\}. \end{aligned}$$

Seien nun $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot t^{\alpha_n}$, $g = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot t^{\beta_n} \in K\{\{t\}\}$ gegeben.

a. $f * g = \sum_{n=0}^{\infty} \big(\sum_{\alpha_i + \beta_j = \gamma_n} a_i \cdot b_j \big) \cdot t^{\gamma_n}$, wobei $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}} = \Phi^{-1}\big(\Phi((\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}) * \Phi((\beta_n)_{n\in\mathbb{N}})\big)$.

b. $f + g = \sum_{n=0}^{\infty} \big(f(\gamma_n) + g(\gamma_n)\big) \cdot t^{\gamma_n}$, wobei $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}} = \Phi^{-1}\big(\Phi((\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}) + \Phi((\beta_n)_{n\in\mathbb{N}})\big)$.

c. Wenn $\alpha_0 = 0$ und $a_0 = 1$, dann gilt $f^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \big(- \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot t^k \big)^n$.