Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig Wintersemester 2016/17, Blatt 2

Kommutative Algebra

Abgabe: Donnerstag, 27/10/2016, 10:00 Uhr

Die Präsenzaufgaben werden in der Übungsstunde diskutiert; es brauchen keine Lösungen für sie eingereicht zu werden.

Aufgabe 4: Ist R ein Ring, so ist $R \hookrightarrow R[x_1, \ldots, x_n] : a \mapsto a$ offenbar ein Ringhomomorphismus und macht somit $R[x_1, \ldots, x_n]$ zu einer R-Algebra.

a. Zeige, daß $R[x_1, \ldots, x_n]$ die folgende universelle Eigenschaft erfüllt: wenn (R', φ) irgendeine R-Algebra ist und $a_1, \ldots, a_n \in R'$ gegeben sind, dann gibt es einen eindeutigen R-Algebrenhomomorphismus $\alpha : R[x_1, \ldots, x_n] \to R'$ mit $\alpha(x_i) = a_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$.

b. Sei $I \trianglelefteq R[x_1, \ldots, x_n]$ und $J \trianglelefteq R[y_1, \ldots, y_m]$ und sei $\varphi : R[x_1, \ldots, x_n]/I \to R[y_1, \ldots, y_m]/J$. Zeige, daß die folgenden Aussagen äquivalent sind:

   (a) φ ist ein R-Algebrenhomomorphismus.

   (b) Es gibt $f_1, \ldots, f_n \in R[y_1, \ldots, y_m]$, so daß $g(f_1, \ldots, f_n) \in J$ für alle $g \in I$ und $\varphi(\overline{g}) = \overline{g(f_1, \ldots, f_n)}$ für alle $\overline{g} \in R[x_1, \ldots, x_n]/I$.

   (c) Es gibt einen R-Algebrenhomomorphismus $\psi : R[x_1, \ldots, x_n] \to R[y_1, \ldots, y_m]$, so daß $\psi(I) \subseteq J$ und $\varphi(\overline{g}) = \overline{\psi(g)}$.

Beachte, a. bedeutet, daß wir einen R-Algebrenhomomorphismus auf $R[x_1, \ldots, x_n]$ dadurch eindeutig festlegen können, daß wir die Bilder der x_i vorgeben!

Aufgabe 5: Es sei R ein Ring und $I, J_1, \ldots, J_n \trianglelefteq R$. Zeige:

a. $I : \left(\sum_{i=1}^n J_i\right) = \bigcap_{i=1}^n (I : J_i)$.

b. $\left(\bigcap_{i=1}^n J_i\right) : I = \bigcap_{i=1}^n (J_i : I)$.

c. $\sqrt{J_1 \cap \ldots \cap J_n} = \sqrt{J_1} \cap \ldots \cap \sqrt{J_n}$.

d. $\sqrt{J_1 + \ldots + J_n} \supseteq \sqrt{J_1} + \ldots + \sqrt{J_n}$.

Aufgabe 6: Es sei R ein Ring und $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \in R[[x]]$ eine formale Potenzreihe über R. Zeige:

a. f ist genau dann eine *Einheit* wenn a_0 eine Einheit in R ist.

b. Was sind die Einheiten in $K[[x]]$, wenn K ein Körper ist?

c. x ist kein Nullteiler in $R[[x]]$.

d. Wenn f nilpotent ist, dann ist a_n nilpotent für alle n. Gilt die Umkehrung auch?

Hinweis zu a.: betrachte zunächst den Fall $a_0 = 1$ und verwende die geometrische Reihe.

Präsenzaufgabe 4: Betrachte die Ringerweiterung

$$\iota : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_7 = \left\{ \frac{z}{7^n} \;\middle|\; n \geq 0, z \in \mathbb{Z} \right\} : z \mapsto z$$

und die Ideale $I = \langle 84 \rangle \lhd \mathbb{Z}$ und $J = \langle 15 \rangle \lhd \mathbb{Z}_7$. Gib Erzeuger für I^e, I^{ec}, J^c und J^{ce}.

Präsenzaufgabe 5: Gilt die folgende Gleichheit im Polynomring $\mathbb{C}[x, y]$:

$$\langle x^3 - x^2, x^2y - x^2, xy - y, y^2 - y \rangle = \langle x^2, y \rangle \cap \langle x - 1, y - 1 \rangle.$$

Präsenzaufgabe 6: Welche Primideale in $\mathbb{C}[x, y]$ enthalten das Ideal $I = \langle x^2y - x^2 \rangle$.