Fachbereich Mathematik Wintersemester 2016/17, Blatt 3
Thomas Markwig

# Kommutative Algebra

Abgabe: Donnerstag, 03/11/2016, 10:00 Uhr

**Aufgabe 8:** Sei $R$ ein Ring, so daß es für jedes $r \in R$ ein $n = n(r) > 1$ gibt mit $r^n = r$.

a. Zeige, $\text{Spec}(R) = \mathfrak{m} - \text{Spec}(R)$.

b. Finde ein Beispiel für einen solchen Ring, der kein Körper ist.

**Aufgabe 9:** Es sei $R \neq 0$ ein Ring. Zeige, $\text{Spec}(R)$ hat ein minimales Element bezüglich der Inklusion, d.h. $\exists\, P_0 \in \text{Spec}(R)\ :\ \forall\, P \in \text{Spec}(R)$ mit $P \subseteq P_0$ gilt $P = P_0$.

Hinweis, verwende das Zornsche Lemma mit einer geeigneten Teilordnung auf der Menge aller Primideale.

**Aufgabe 10:** Es sei $R$ ein Ring und $N(R)$ sein Nilradikal. Zeige, daß die folgenden Aussagen äquivalent sind:

a. $R/N(R)$ ist ein Körper

b. $|\text{Spec}(R)| = 1$.

c. Jedes Element von $R$ ist entweder eine Einheit oder nilpotent.

Finde ein Beispiel für einen solchen Ring, der kein Körper ist.

**Aufgabe 11:** Es sei $M$ ein $R$-Modul.

a. Zeige, $\mu : M \to \text{Hom}_R(R, M)$ mit $\mu(m) : R \to M : r \mapsto r \cdot m$ ist ein Isomorphismus.

b. Finde ein Beispiel, für das $M \not\cong \text{Hom}_R(M, R)$ gilt.

**Aufgabe 12:** Es sei $R$ ein Integritätsbereich und $0 \neq I \trianglelefteq R$.
Zeige, daß $I$ als $R$-Modul genau dann frei ist, wenn $I$ ein Hauptideal ist.

**Präsenzaufgabe 7:** Welche der folgenden Ideale $I$ in $\mathbb{Z}[x]$ sind maximale Ideale?

a. $I = \langle 5, 11x^3 + x - 1 \rangle$.

b. $I = \langle 4, x^2 + x + 1, x^2 + x - 1 \rangle$.

Wie viele Elemente hat der zugehörige Körper $\mathbb{Z}[x]/I$?

**Präsenzaufgabe 8:** Es sei $K$ ein Körper. Zeige, $x^2 - y^3 \in K[x, y]$ ist irreduzibel.