Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Wintersemester 2016/17, Blatt 4

Kommutative Algebra

Abgabe: Donnerstag, 10/11/2016, 10:00 Uhr

Aufgabe 13:

a. Sei $R = \mathbb{R}[[x]]$ der Ring der formalen Potenzreihen über dem Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen. Man betrachte die R-lineare Abbildung $\varphi : R^3 \to R^2 : m \mapsto A \cdot m$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 + x^4 - x^7 + 3x^{100} & \cos(x) & 2 - \exp(x) \\ x^4 - 5x^8 & \sum_{i=0}^{\infty}(5x + x^2)^i & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2 \times 3, R).$$

Ist φ ein Epimorphismus?

b. Sei $p \in \mathbb{Z}$ eine Primzahl. Betrachte den Unterring $R = \left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z}, p \nmid b \right\} \leq \mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen und fasse $M = \mathbb{Q}$ als R-Modul auf.

(1) Man zeige, dass R ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m} = \left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z}, p \nmid b, p \mid a \right\}$ ist.

(2) Zeige, dass $\mathfrak{m} \cdot M = M$, aber $M \neq 0$ gilt.

(3) Finde ein *diskretes* Erzeugendensystem für M.

Aufgabe 14: Seien R ein Ring und P ein R-Modul. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind.

a. Ist $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ surjektiv und $\psi \in \mathrm{Hom}_R(P, N)$, so gibt es ein $\alpha \in \mathrm{Hom}_R(P, M)$ mit $\varphi \circ \alpha = \psi$, d.h. das folgende Diagramm ist kommutativ.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "\psi"] \arrow[dl, dashed, "\exists\,\alpha"'] \\ M \arrow[r, two heads, "\varphi"'] & N \end{tikzcd}$$

b. Ist $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ surjektiv, so ist $\varphi_* : \mathrm{Hom}_R(P, M) \to \mathrm{Hom}_R(P, N) : \alpha \mapsto \varphi \circ \alpha$ surjektiv.

c. Ist die Sequenz $0 \to L \to M \to P \to 0$ exakt, so spaltet diese.

d. Es existiert ein freier Modul F und ein Untermodul $M \leq F$ mit $P \oplus M \cong F$.

Aufgabe 15: Sei $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ eine exakte Sequenz von R-Moduln. Zeige: Sind M' und M'' endlich erzeugt, so auch M.

Hinweis: Eine Möglichkeit besteht darin, das Snake Lemma und die Tatsache zu verwenden, dass freie Moduln die Bedinungen in Aufgabe 14 erfüllen sind. Alternativ lässt sich ein Erzeugendensystem angeben.

Aufgabe 16: Seien R ein Ring, M, M' und M'' seien R-Moduln, $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M', M)$ und $\psi \in \mathrm{Hom}_R(M, M'')$. Zeige, dass

$$M' \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} M'' \longrightarrow 0$$

genau dann exakt ist, wenn für jeden R-Modul P die Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M'', P) \xrightarrow{\psi^*} \mathrm{Hom}_R(M, P) \xrightarrow{\varphi^*} \mathrm{Hom}_R(M', P)$$

exakt ist.

Präsenzaufgabe 9: Betrachte $R = \mathbb{R}[x, y, z]$ und $M = \langle xy, xz, yz \rangle$. Finde ein Polynom $0 \neq F \in R[t]$ mit $F(\varphi) = 0$. Dabei ist φ die Einschränkung von

$$R \longrightarrow R : f \mapsto f \cdot (x + y + z)$$

auf M.

Präsenzaufgabe 10: Sei $R = K[x, y]$ und $I = \langle x, y \rangle$. Bestimme R-lineare Abbildungen, sodass die Sequenz

$$0 \longrightarrow R \longrightarrow R^2 \longrightarrow R \longrightarrow R/I \longrightarrow 0$$

eine exakte Sequenz von R-linearen Abbildungen ist.