Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig Wintersemester 2016/17, Blatt 5

Kommutative Algebra

Abgabe: Donnerstag, 17/11/2016, 10:00 Uhr

Aufgabe 17: Angenommen, $(R, \mathfrak{m})$ ist ein lokaler Ring und M ein R-Modul, sodass $M \oplus R^m \cong R^n$ für gewisse $n \geq m$. Zeige, dass dann $M \cong R^{n-m}$ gilt.

Aufgabe 18: Sei R' eine R-Algebra und M und N seien R-Moduln. Zeige, dass die Abbildung

$$\Phi : \big(M \otimes_R N\big) \otimes_R R' \longrightarrow \big(M \otimes_R R'\big) \otimes_{R'} \big(N \otimes_R R'\big) : m \otimes n \otimes r' \mapsto (m \otimes r') \otimes (n \otimes 1)$$

ein Isomorphismus von R'-Moduln ist.

Man erinnere sich, dass $M \otimes_R R'$ mittels $r' \cdot (m \otimes s') := m \otimes (r' \cdot s')$ zu einem Modul über R' wird.

Aufgabe 19: Seien $(R, \mathfrak{m})$ ein lokaler Ring und M und N endlich erzeugte R-Moduln. Zeige, dass genau dann $M \otimes N = 0$ gilt, wenn $M = 0$ oder $N = 0$ ist.

Hinweis: Benutze Aufgabe 18 und Nakayama's Lemma.

Aufgabe 20: Sei R ein Ring und M und N seien R-Moduln. Man nehme an, dass $N = \langle n_\lambda \mid \lambda \in \Lambda \rangle$. Zeige folgende Aussagen.

a. $M \otimes_R N = \left\{ \sum_{\lambda \in \Lambda} m_\lambda \otimes n_\lambda \;\middle|\; m_\lambda \in M \text{ mit nur endlich vielen } m_\lambda \neq 0 \right\}$.

b. Sei $x = \sum_{\lambda \in \Lambda} m_\lambda \otimes n_\lambda \in M \otimes_R N$ mit $m_\lambda \in M$ und nur endlich vielen $m_\lambda \neq 0$.

   Dann ist genau dann $x = 0$, wenn es eine Indexmenge Θ, $m'_\theta \in M$ und $a_{\lambda,\theta} \in R$ mit $\theta \in \Theta$ gibt, sodass

$$m_\lambda = \sum_{\theta \in \Theta} a_{\lambda,\theta} \cdot m'_\theta \quad \text{für alle} \quad \lambda \in \Lambda$$

   und

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} a_{\lambda,\theta} \cdot n_\lambda = 0 \quad \text{für alle} \quad \theta \in \Theta.$$

Hinweis zu b.: Betrachte zunächst den Fall, dass N frei in den $(n_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ ist und zeige, dass dann alle m_λ null sind. Betrachte anschließend eine freie Darstellung $\bigoplus_{\theta \in \Theta} R \to \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} R \to N \to 0$ von N und tensoriere diese mit M.

Präsenzaufgabe 11:

a. Betrachte die $\mathbb{Z}$-Moduln $M = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und $N = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Wie viele Elemente besitzt $M \otimes_\mathbb{Z} N$? Gibt es einen vertrauten $\mathbb{Z}$-Modul, der isomorph zu $M \otimes_\mathbb{Z} N$ ist?

b. Betrachte den $\mathbb{Z}$-Modul $M = \mathbb{Z}^3 \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$-Vektorraum $M \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Q}$. Was ist dessen Dimension?

Präsenzaufgabe 12: Sei K ein Körper. Ist der K-Vektorraum $K[x] \otimes_K K[y]$ isomorph zu einem wohlbekannten K-Vektorraum? Kann man auf dem Tensorprodukt eine Multiplikation definieren, sodass dieses zu einer vertrauten K-Algebra wird?