Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig Wintersemester 2016/17, Blatt 6

Kommutative Algebra

Abgabe: Donnerstag, 24/11/2016, 10:00 Uhr

Aufgabe 21: Man betrachte eine eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge $S \subseteq R$ und die Ringerweiterung $i : R \to S^{-1}R : r \mapsto \frac{r}{1}$. Zeige, dass die Abbildung

$$\left\{P \in \operatorname{Spec}(R) \mid S \cap P = \emptyset\right\} \longrightarrow \operatorname{Spec}\left(S^{-1}R\right) : P \mapsto P^e = S^{-1}P$$

bijektiv ist und die Inverse durch

$$\operatorname{Spec}\left(S^{-1}R\right) \longrightarrow \left\{P \in \operatorname{Spec}(R) \mid S \cap P = \emptyset\right\} : Q \mapsto Q^c = i^{-1}(Q)$$

gegeben ist. Insbesondere erhält man damit für Primideale $P \in \operatorname{Spec}(R)$, dass stets $(P^e)^c = P$ gilt.

Aufgabe 22:

a. Sei K ein Körper, $R = K[x, y, z]/\langle xz, yz\rangle$ und $P = \langle x, y, z-1\rangle \trianglelefteq R$. Zeige $R_P \cong K[z]_{\langle z-1\rangle}$.

b. Sei R ein Ring, $f \in R$ ein Nichtnullteiler. Zeige $R_f \cong R[x]/\langle fx - 1\rangle$.

Aufgabe 23: Sei R ein Ring und $\mathcal{N}(R)$ dessen Nilradikal. Zeige:

a. Ist $S \subseteq R$ multiplikativ abgeschlossen, so gilt $\mathcal{N}(S^{-1}R) = S^{-1}\mathcal{N}(R)$.

b. Ein Ring heißt *reduziert*, falls er keine von 0 verschiedenen nilpotenten Elemente enthält. Zeige, dass "Reduziertheit" eine lokale Eigenschaft ist, d.h. die folgenden Aussagen sind äquivalent.

   (1) R ist reduziert.

   (2) R_P ist reduziert für jedes $P \in \operatorname{Spec}(R)$.

   (3) $R_\mathfrak{m}$ ist reduziert für jedes $\mathfrak{m} \lhd \cdot R$.

c. Zeige, dass "Flachheit" eine lokale Eigenschaft ist, d.h., ist M ein R-Modul, so sind die folgenden Aussagen äquivalent.

   (1) M ist ein flacher R-Modul.

   (2) M_P ist ein flacher R_P-Modul für jedes $P \in \operatorname{Spec}(R)$.

   (3) $M_\mathfrak{m}$ ist ein flacher $R_\mathfrak{m}$-Modul für jedes $\mathfrak{m} \lhd \cdot R$.

Hinweis zu c.: Benutze Aufgabe 21 und beachte, dass jeder R_P-Modul N auch ein R-Modul ist und dass $N_P = N$.

Aufgabe 24: Sei $I := \langle 2, 1+\sqrt{-5}\rangle \lhd \mathbb{Z}\left[\sqrt{-5}\right]$. Zeige, dass I als R-Modul projektiv, aber nicht frei ist.

Hinweis: Beachte, dass $2 \in I \cdot I$. Benutze dies, um zu zeigen, dass $I \neq \langle x \rangle$ für jedes x. Außerdem gilt für jedes Primideal P, das I enthält, dass I_P von $1+\sqrt{-5}$ erzeugt wird. Benutze für die letzte Aussage Nakayama's Lemma.

Präsenzaufgabe 13: Sei $R = K[x,y]$ und $P = K[x,y,z]/\langle xz-x, yz-y-z+1\rangle$. Ist P ein flacher R-Modul?

Präsenzaufgabe 14: Sei $\mathfrak{m} = \langle x,y\rangle \lhd K[x,y]$. Lokalisiere den Ring R und den Modul P aus Präsenzaufgabe 13 nach $\mathfrak{m}$. Ist der resultierende Modul $P_{\mathfrak{m}}$ ein flacher $R_{\mathfrak{m}}$-Modul?