Fachbereich Mathematik — Wintersemester 2016/17, Blatt 7

Thomas Markwig

Kommutative Algebra

Abgabe: Donnerstag, 01/12/2016, 10:00 Uhr

Aufgabe 25: Sei M ein R-Modul und $\varphi : M \to M$ eine R-lineare Abbildung. Zeige:

a. Ist M noethersch und φ surjektiv, so ist φ ein Isomorphismus.

b. Ist M artinsch und φ injektiv, so ist φ ein Isomorphismus.

Hinweis: Betrachte den Kern bzw. den Kokern von φ^n für $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 26: Welche der folgenden Ringe R_i sind noethersch?

a. $R_1 = \left\{ \frac{g}{h} \in \operatorname{Quot}(\mathbb{C}[x]) \;\middle|\; h(z) \neq 0 \text{ für } |z| = 1 \right\}$.

b. $R_2 = \left\{ f \in \mathbb{C}\{x\} \;\middle|\; f \text{ hat unendlichen Konvergenzradius} \right\}$.

c. $R_3 = \left\{ f \in \mathbb{C}[x] \;\middle|\; \frac{\partial^i f}{\partial x^i}(0) = 0 \text{ für } i = 1, \ldots, k \right\}$, k fest.

Aufgabe 27: Sei $\mathbb{Q} \subseteq K$ eine Körpererweiterung mit $\dim_{\mathbb{Q}}(K) < \infty$ und R ein Unterring von K, der $\mathbb{Z}$ enthält, sodass $I \cap \mathbb{Z} \neq \{0\}$ für jedes Ideal $0 \neq I \trianglelefteq R$. Zeige, dass R noethersch ist.

Hinweis: Zeige zuerst, dass $\dim_{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}(R/pR) \leq \dim_{\mathbb{Q}}(K)$ für jede Primzahl p. Folgere dann, dass für $0 \neq m \in I \cap \mathbb{Z}$ die Menge R/mR (und damit I/mR) per Induktion nach der Anzahl der Primfaktoren von $m = p_1 \cdots p_k$, p_i Primzahl, endlich ist. – Anmerkung: Mit etwas Körpertheorie kann man zeigen, dass die Voraussetzung $I \cap \mathbb{Z} \neq \{0\}$ immer erfüllt ist.

Aufgabe 28: Seien $R \subseteq R' \subseteq R''$ Ringe, $R'' = R[a_1, \ldots, a_n]$ endlich erzeugt als R-Algebra und R'' endlich erzeugt als R'-Modul. Zeige: Ist R noethersch, so ist R' endlich erzeugt als R-Algebra und noethersch.

Erinnerung: $R[a_1, \ldots, a_n] = \{f(a_1, \ldots, a_n) \mid f \in R[x_1, \ldots, x_n]\}$ ist die Menge aller polynomialen Ausdrücke in $a_1, \ldots, a_n$ mit Koeffizienten in R. Hinweis: Ist $R'' = \langle b_1, \ldots, b_m \rangle_{R'}$, so schreibe a_i und $b_i \cdot b_j$ als Linearkombinationen über die b_ν und betrachte die R-Algebra, die durch die Koeffizienten erzeugt wird.

Präsenzaufgabe 15: Zeige, dass $\mathbb{C}[x, y]/I$ mit $I = \langle x^3 - x^2, x^2y + 2x^2, xy - y, y^2 + 2y \rangle$ ein artinscher Ring ist und stelle diesen als direkte Summe zweier lokaler artinscher Ringe dar.

Präsenzaufgabe 16: Ist $K(x) = \operatorname{Quot}(K[x])$ ein noetherscher $K[x]_{\langle x \rangle}$-Modul?