Fachbereich Mathematik — Wintersemester 2016/17, Blatt 8

Thomas Markwig

Kommutative Algebra

Abgabe: Donnerstag, 15/12/2016, 10:00 Uhr

Aufgabe 29:

a. Sei $\varphi : R \to R'$ ein Ringhomomorphismus und $Q \lhd R'$ ein P-primäres Ideal. Zeige, dass $Q^c = \varphi^{-1}(Q)$ ein $P^c = \varphi^{-1}(P)$-primäres Ideal ist.

b. Sei R ein Ring, $P \in \mathrm{Spec}(R)$, und $n \geq 1$. Zeige, dass die *symbolische Potenz* $P^{(n)} := \{a \in R \mid \exists\, s \in R \setminus P \,:\, s \cdot a \in P^n\}$ ein P-primäres Ideal ist.

Beachte: Ist $\iota : R \to R_P : a \mapsto \frac{a}{1}$, so ist $P^{(n)} = \left((P^n)^e\right)^c = \iota^{-1}\left(\langle P^n\rangle_{R_P}\right)$.

Aufgabe 30: Seien R ein Integritätsbereich von Dimension $\dim(R) = 1$ und $0 \neq I \unlhd R$. Zeige die folgenden Aussagen.

a. Ist $I = Q_1 \cap \ldots \cap Q_n$ eine minimale Primärzerlegung, so ist $I = Q_1 \cdots Q_n$.

b. Ist R noethersch, so ist I endliches Produkt von primären Idealen Q_i mit $\sqrt{Q_i} \neq \sqrt{Q_j}$ für $i \neq j$. Dabei sind die Faktoren bis auf die Reihenfolge eindeutig.

Hinweis: Chinesischer Restsatz.

Aufgabe 31: Finde eine minimale Primärzerlegung von $I = \langle 6\rangle \lhd \mathbb{Z}\left[\sqrt{-5}\right]$.

Hinweis: Betrachte die Ideale $P = \langle 2, 1+\sqrt{-5}\rangle$, $Q = \langle 3, 1+\sqrt{-5}\rangle$, und $Q' = \langle 3, 1-\sqrt{-5}\rangle$.

Aufgabe 32: Sei $R = K[x, y, z]$ mit einem Körper K.

a. Sei $P = \langle x, y\rangle$ und $Q = \langle y, z\rangle$. Bestimme eine minimale Primärzerlegung von $I = P \cdot Q$. Welche der Komponenten sind isoliert und welche eingebettet?

b. Bestimme eine Pirmärzerlegung von $J = \langle xz - y^2, y - x^2\rangle$.

Hinweis zu b.: Betrachte $\varphi : R \to K[x]$ mit $x \mapsto x, y \mapsto x^2, z \mapsto x^3$, $P = \ker(\varphi)$ und $Q = \langle x, y\rangle$. Zeige $\ker(\varphi) = \langle y - x^2, z - x^3\rangle$ mittels Division mit Rest.

Präsenzaufgabe 17: Finde eine Primärzerlegung von $\langle x^3y^2 - xy^4\rangle$ in $K[x, y]$.

Präsenzaufgabe 18: Finde eine Primärzerlegung von $\langle x^2 - x, xy - x\rangle$ in $K[x, y]$.

Präsenzaufgabe 19: Finde eine Primärzerlegung des Ideals $\langle x^3 - x^2 - x + 1, x^2y - x^2 - 2xy + 2x + y - 1, xy + y, y^2 - y\rangle$ in $K[x, y]$ und in $K[x, y]_{x+1}$.