Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Wintersemester 2016/17, Blatt 10

Kommutative Algebra

Abgabe: Donnerstag, 12/01/2017, 10:00 Uhr

Aufgaben 37 c. und d., 38 b. sowie 39 a., b. und c. müssen nicht abgegeben werden und werden in den Übungen voraussichtlich auch nicht besprochen. Sie bieten dem Material, der in der Weihnachtszeit sonst nicht ausgelastet ist.

Aufgabe 36: Seien K ein Körper, $\overline{K}$ ein algebraischer Abschluss von K und $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$.

a. Zeige, dass $\overline{K}[x_1, \ldots, x_n]$ ganz über $K[x_1, \ldots, x_n]$ ist.

b. Zeige, dass $f \cdot \overline{K}[x_1, \ldots, x_n] \cap K[x_1, \ldots, x_n] = f \cdot K[x_1, \ldots, x_n]$.

c. Zeige, dass $\overline{K}[x_1, \ldots, x_n]/\langle f\rangle$ ganz über $K[x_1, \ldots, x_n]/\langle f\rangle$ ist.

Hinweis zu b.: Es darf die Monomordnung aus Aufgabe 36 c. verwendet werden.

Aufgabe 37: [Invariantenringe]

Seien G eine *endliche* Gruppe, $R = K[\underline{x}]/I$ eine endlich erzeugte K-Algebra und $G \to \mathrm{Aut}_{K-alg}(R)$ ein Gruppenhomomorphismus (man sagt, dass G mittels K- Algebraautomorphismen auf R *wirkt*). Schreibe $g \cdot f := \alpha(g)(f)$ für $g \in G$ und $f \in R$. Betrachte außerdem $R^G = \{f \in R \mid g \cdot f = f \;\forall\, g \in G\}$, den *Invariantenring von* G *in* R.

a. Zeige, dass R ganz über R^G ist.

b. Zeige, dass R^G eine endlich erzeugte K-Algebra und damit noethersch ist.

c. Sei $\mathrm{Mon}(\underline{x}) = \{0\} \cup \{\underline{x}^\alpha \mid \alpha \in \mathbb{N}^n\}$, $\mathrm{Mon}(f) = \{\underline{x}^\alpha \mid a_\alpha \neq 0\}$ für $0 \neq f = \sum_\alpha a_\alpha \underline{x}^\alpha \in K[\underline{x}]$ und $\mathrm{Mon}(0) = \{0\}$. Wir definieren eine *Wohlordnung* auf $\mathrm{Mon}(\underline{x})$ mittels $\underline{x}^\alpha > 0$ für alle α und

$$\begin{aligned} \underline{x}^\alpha > \underline{x}^\beta \quad \Longleftrightarrow \quad & \deg(\underline{x}^\alpha) > \deg(\underline{x}^\beta) \quad \text{oder} \\ & (\deg(\underline{x}^\alpha) = \deg(\underline{x}^\beta) \quad \text{und} \quad \exists\, i\, : \alpha_1 = \beta_1, \ldots, \alpha_{i-1} = \beta_{i-1}, \alpha_i > \beta_i). \end{aligned}$$

Wir nennen $\mathrm{lm}(f) = \max\big(\mathrm{Mon}(f)\big)$ das *Leitmonom* von f.

Zeige ($\underline{x}^\alpha > \underline{x}^\beta \implies \underline{x}^\alpha \cdot \underline{x}^\gamma > \underline{x}^\beta \cdot \underline{x}^\gamma$) und damit $\mathrm{lm}(f \cdot g) = \mathrm{lm}(f) \cdot \mathrm{lm}(g)$.

d. Betrachte den Gruppenhomomorphismus

$$\mathrm{Sym}(n) \longrightarrow \mathrm{Aut}_{K-alg}\big(K[x_1, \ldots, x_n]\big) : \sigma \mapsto (f \mapsto f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$$

und das Polynom $(X + x_1) \cdots (X + x_n) = X^n + s_1 X^{n-1} + \ldots + s_n \in K[x_1, \ldots, x_n][X]$. Zeige $K[x_1, \ldots, x_n]^{\mathrm{Sym}(n)} = K[s_1, \ldots, s_n]$.

Hinweis: Benutze Aufgabe 28 für b. Zeige für d. zunächst, dass $\underline{x}^\alpha = \mathrm{lm}(f)$ für $f \in K[x_1, \ldots, x_n]^{\mathrm{Sym}(n)}$ stets $\alpha_1 \geq \ldots \geq \alpha_n$ impliziert und folgere, dass es ein $g \in K[s_1, \ldots, s_n]$ gibt mit $\mathrm{lm}(f) = \mathrm{lm}(g)$. Benutze dies für eine Induktion nach $\mathrm{lm}(f)$, um zu zeigen, dass $f \in K[s_1, \ldots, s_n]$. Beachte $s_i = \sum_{1 \leq j_1 < \ldots < j_i \leq n} x_{j_1} \cdots x_{j_i}$, was ist also $\mathrm{lm}(s_i)$?

Aufgabe 38:

a. Sei $R \subset R'$ eine ganze Ringerweiterung und $\mathfrak{m}' \lhd \cdot R'$ ein maximales Ideal, sodass $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}' \cap R \lhd \cdot R$ ebenfalls maximal ist. Ist dann $R'_{\mathfrak{m}'}$ ganz über $R_{\mathfrak{m}}$?

b. Seien $R \subset R'$ Integritätsbereiche und $f, g \in R'[x]$ normierte Polynome. Zeige: Ist $f \cdot g \in \mathrm{Int}_{R'}(R)[x]$, so auch $f, g \in \mathrm{Int}_{R'}(R)[x]$.

Hinweis zu a): Betrachte $R = K[x^2 - 1]$, $R' = K[x]$, $\mathfrak{m}' = \langle x - 1 \rangle$ und $f = \frac{1}{1+x} \in R'_{\mathfrak{m}'}$.

Anmerkung zu b): Wendet man dies auf $R = \mathbb{Z}$ und $R' = \mathbb{Q}$ an, so erhält man für normierte $f, g \in \mathbb{Q}[x]$, dass falls $f \cdot g \in \mathbb{Z}[x]$, so auch $f, g \in \mathbb{Z}[x]$.

Aufgabe 39: [Ganzheitsringe quadratischer Zahlkörper]

Sei $d \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$ quadratfrei (d.h. kein Quadrat a^2, $a \neq \pm 1$, teilt d). Es ist dann $\mathbb{Q}\big[\sqrt{d}\big] = \{a + b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ eine Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$ mit $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}\big[\sqrt{d}\big] = 2$. Betrachte die *Konjugation*

$$C : \mathbb{Q}\big[\sqrt{d}\big] \longrightarrow \mathbb{Q}\big[\sqrt{d}\big] : a + b\sqrt{d} \mapsto a - b\sqrt{d},$$

die *Norm*

$$N : \mathbb{Q}\big[\sqrt{d}\big] \longrightarrow \mathbb{Q} : a + b\sqrt{d} \mapsto (a + b\sqrt{d}) \cdot C(a + b\sqrt{d}) = a^2 - b^2 d,$$

und die *Spur*

$$T : \mathbb{Q}\big[\sqrt{d}\big] \longrightarrow \mathbb{Q} : a + b\sqrt{d} \mapsto (a + b\sqrt{d}) + C(a + b\sqrt{d}) = 2a.$$

Zeige:

a. $C(x \cdot y) = C(x) \cdot C(y)$ und $N(x \cdot y) = N(x) \cdot N(y)$ für $x, y \in \mathbb{Q}\big[\sqrt{d}\big]$.

b. C und T sind $\mathbb{Q}$-linear.

c. Ist $x \in \mathbb{Q}\big[\sqrt{d}\big] \setminus \mathbb{Q}$, so ist $\mu_x = (t - x) \cdot \big(t - C(x)\big) = t^2 - T(x) \cdot t + N(x) \in \mathbb{Q}[t]$ das Minimalpolynom von x über $\mathbb{Q}$.

d. $x \in \mathbb{Q}\big[\sqrt{d}\big]$ ist genau dann ganz über $\mathbb{Z}$, wenn $T(x)$ und $N(x)$ ganzzahlig sind.

e. $\mathrm{Int}_{\mathbb{Q}[\sqrt{d}]}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[\omega_d]$, wobei $\omega_d = \begin{cases} \sqrt{d}, & \text{falls } d \equiv 2, 3 \bmod 4 \\ \frac{1+\sqrt{d}}{2}, & \text{falls } d \equiv 1 \bmod 4. \end{cases}$