Fachbereich Mathematik Wintersemester 2016/17, Blatt 11
Thomas Markwig

Kommutative Algebra

Abgabe: Donnerstag, 19/01/2017, 10:00 Uhr

Aufgabe 37:

c. Sei $\operatorname{Mon}(\underline{x}) = \{0\} \cup \{\underline{x}^\alpha \mid \alpha \in \mathbb{N}^n\}$, $\operatorname{Mon}(f) = \{\underline{x}^\alpha \mid a_\alpha \neq 0\}$ für $0 \neq f = \sum_\alpha a_\alpha \underline{x}^\alpha \in K[\underline{x}]$ und $\operatorname{Mon}(0) = \{0\}$. Wir definieren eine *Wohlordnung* auf $\operatorname{Mon}(\underline{x})$ mittels $\underline{x}^\alpha > 0$ für alle α und

$$\begin{aligned}\underline{x}^\alpha > \underline{x}^\beta \quad \Longleftrightarrow \quad & \deg(\underline{x}^\alpha) > \deg(\underline{x}^\beta) \quad \text{oder} \\ & (\deg(\underline{x}^\alpha) = \deg(\underline{x}^\beta) \quad \text{und} \quad \exists\, i\ : \alpha_1 = \beta_1, \ldots, \alpha_{i-1} = \beta_{i-1}, \alpha_i > \beta_i).\end{aligned}$$

Wir nennen $\operatorname{lm}(f) = \max\big(\operatorname{Mon}(f)\big)$ das *Leitmonom* von f.

Zeige $(\underline{x}^\alpha > \underline{x}^\beta \implies \underline{x}^\alpha \cdot \underline{x}^\gamma > \underline{x}^\beta \cdot \underline{x}^\gamma)$ und damit $\operatorname{lm}(f \cdot g) = \operatorname{lm}(f) \cdot \operatorname{lm}(g)$.

d. Betrachte den Gruppenhomomorphismus

$$\operatorname{Sym}(n) \longrightarrow \operatorname{Aut}_{K-alg}\big(K[x_1, \ldots, x_n]\big) : \sigma \mapsto (f \mapsto f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$$

und das Polynom $(X + x_1) \cdots (X + x_n) = X^n + s_1 X^{n-1} + \ldots + s_n \in K[x_1, \ldots, x_n][X]$. Zeige $K[x_1, \ldots, x_n]^{\operatorname{Sym}(n)} = K[s_1, \ldots, s_n]$.

Hinweis: Zeige für d. zunächst, dass $\underline{x}^\alpha = \operatorname{lm}(f)$ für $f \in K[x_1, \ldots, x_n]^{\operatorname{Sym}(n)}$ stets $\alpha_1 \geq \ldots \geq \alpha_n$ impliziert und folgere, dass es ein $g \in K[s_1, \ldots, s_n]$ gibt mit $\operatorname{lm}(f) = \operatorname{lm}(g)$. Benutze dies für eine Induktion nach $\operatorname{lm}(f)$, um zu zeigen, dass $f \in K[s_1, \ldots, s_n]$. Beachte $s_i = \sum_{1 \leq j_1 < \ldots < j_i \leq n} x_{j_1} \cdots x_{j_i}$, was ist also $\operatorname{lm}(s_i)$?

Aufgabe 38:

b. Seien $R \subset R'$ Integritätsbereiche und $f, g \in R'[x]$ normierte Polynome. Zeige: Ist $f \cdot g \in \operatorname{Int}_{R'}(R)[x]$, so auch $f, g \in \operatorname{Int}_{R'}(R)[x]$.

Anmerkung zu b): Wendet man dies auf $R = \mathbb{Z}$ und $R' = \mathbb{Q}$ an, so erhält man für normierte $f, g \in \mathbb{Q}[x]$, dass falls $f \cdot g \in \mathbb{Z}[x]$, so auch $f, g \in \mathbb{Z}[x]$.

Aufgabe 40:

a. Zeige, ist $R \subset R'$ ganz, so gilt $J(R) = R \cap J(R')$.

b. Zeige, sind $R_1, \ldots, R_n$ ganz über R, so ist auch $R_1 \oplus \ldots \oplus R_n$ ganz über R.

Aufgabe 41:

a. Zeige, dass jedes maximale Ideal in $\mathbb{Z}[x]$ von einer Primzahl $p \in \mathbb{Z}$ und einem Polynom $f \in \mathbb{Z}[x]$ erzeugt werden kann, sodass dessen Restklasse in $\mathbb{Z}_p[x]$ irreduzibel ist.

b. Zeige $\dim(\mathbb{Z}[x]) = 2$.

Hinweis zu a.: Zeige zunächst, dass ein maximales Ideal kein Hauptideal sein kann und dass es eine Primzahl enthält. Zeige dann, dass das Ideal modulo dieser Primzahl von einem einzigen Polynom erzeugt wird. Erinnerung: $\mathbb{Z}[x]/\langle p \rangle \cong \mathbb{Z}_p[x]$ ist ein Hauptidealring und in $\mathbb{Q}[x]$ gilt die Bézout Identität.