

Kommutative Algebra

Abgabe: Donnerstag, 26/01/2017, 10:00 Uhr

Aufgabe 42: Sei K ein Körper und \mathfrak{m} ein maximales Ideal in $K[x_1, \dots, x_n]$.
Zeige, $\mathfrak{m} = \langle f_1, \dots, f_n \rangle$ mit $f_i \in K[x_1, \dots, x_i]$.

Aufgabe 43: Zeige, daß für einen Ring R die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- Jedes Primideal in R ist Durchschnitt von maximalen Idealen.
- Ist P ein Primideal, so daß ein $f \in R$ mit $P_f \trianglelefteq R_f$ existiert, so ist $P \trianglelefteq R$.

Aufgabe 44: Seien $K \subseteq K'$ eine Körpererweiterung und $T \subset K'$ (nicht notwendigerweise endlich). T heißt *algebraisch unabhängig* über K , falls jede endliche Teilmenge von T algebraisch unabhängig über K ist. Eine algebraisch unabhängige Menge T ist eine *Transzendenzbasis* von K'/K , falls für jedes $t' \in K' \setminus T$ die Menge $T \cup \{t'\}$ algebraisch abhängig ist. Zeige:

- Eine algebraisch unabhängige Menge T ist genau dann eine Transzendenzbasis von K'/K , wenn K' ganz ist über

$$K(T) = \left\{ \frac{f(t_1, \dots, t_n)}{g(t_1, \dots, t_n)} \mid f, g \in K[x_1, \dots, x_n], g \neq 0, t_1, \dots, t_n \in T, n \geq 1 \right\}.$$

- Sind T und T' Transzendenzbasen von K'/K und ist $t \in T$, so gibt es ein $t' \in T'$, sodass $(T \setminus \{t\}) \cup \{t'\}$ eine Transzendenzbasis von K'/K ist.
- Sind T und T' Transzendenzbasen von K'/K und $|T| < \infty$, so ist $\text{trdeg}_K(K') = |T| = |T'|$.
- $\text{trdeg}_K(K(x_1, \dots, x_n)) = n$.

Hinweis zu b.: Ist $T_0 = T \setminus \{t\}$, so betrachte die Körpererweiterungen $K(T_0) \subset K'$, $K(T' \cup T_0) \subset K'$ und $K(T_0) \subset K(T' \cup T_0) = K(T_0)(T')$. Welche von diesen ist ganz (was in diesem Fall das selbe wie algebraisch ist)?

Aufgabe 45: Bestimme eine Noether-Normalisierung von $R = K[x, y]/\langle x^3 - y^2 \rangle$ und die Normalisierung von R .

Präsenzaufgabe 22: Bestimme alle maximalen Ideale in $\mathbb{C}[x, y]/\langle x^3 - x^2, x^2y - 2x^2 \rangle$.

Präsenzaufgabe 23: Berechne $\text{Quot}(R)$ und $\dim(\text{Quot}(R))$ für $R = K[x, y]/\langle x^2, xy \rangle$.

Aufgabe 46: Sei K ein Körper und \mathfrak{m} ein maximales Ideal in $K[x_1, \dots, x_n]$.
 Zeige, $\mathfrak{m} = \langle f_1, \dots, f_n \rangle$ mit $f_i \in K[x_1, \dots, x_i]$.

Beweis: Wir zeigen die Aussage mittels Induktion nach n , wobei die Aussage für $n = 1$ aus der Tatsache folgt, daß $K[x_1]$ ein Hauptidealring ist.

Wir betrachten nun

$$\mathfrak{m} \cap K[x_1] = \langle f_1 \rangle.$$

Da \mathfrak{m} ein Primideal ist, ist auch $\langle f_1 \rangle$ ein Primideal in $K[x_1]$. Die Körpererweiterung

$$K \hookrightarrow K[x_1, \dots, x_n]/\mathfrak{m}$$

ist wegen des Hilbertschen Nullstellensatzes algebraisch, und wegen

$$K \hookrightarrow K[x_1]/\langle f_1 \rangle \hookrightarrow K[x_1, \dots, x_n]/\mathfrak{m}$$

kann f_1 dann nicht das Nullpolynom sein, weil x_1 transzendent über K ist. Dann ist f_1 aber irreduzibel und

$$L = K[x_1]/\langle f_1 \rangle$$

ist ein Körper und

$$\mathfrak{m}/\langle f_1 \rangle \trianglelefteq L[x_2, \dots, x_n]$$

ist ein maximales Ideal. Nach Induktionsvoraussetzung gilt also

$$\mathfrak{m}/\langle f_1 \rangle = \langle \overline{f_2}, \dots, \overline{f_n} \rangle = \langle f_1, f_2, \dots, f_n \rangle / \langle f_1 \rangle$$

mit $\overline{f_i} \in L[x_2, \dots, x_i]$, d.h. $f_i \in K[x_1, \dots, x_i]$. Damit folgt die Behauptung. □

Aufgabe 47: Zeige, daß für einen Ring R die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- a. Jedes Primideal in R ist Durchschnitt von maximalen Idealen.
- b. Ist P ein Primideal, so daß ein $f \in R$ mit $P_f \trianglelefteq R_f$ existiert, so ist $P \trianglelefteq R$.

Beweis: Wir setzen zunächst voraus, daß jedes Primideal ein Durchschnitt von maximalen Idealen ist. Ist nun P ein Primideal in R und $f \in R$ mit $P_f \trianglelefteq R_f$, dann ist wegen der 1:1-Korrespondenz von Primidealen bei Lokalisierung f in allen Primidealen enthalten, die P echt enthalten. Wäre nun P nicht maximal, so wäre f in allen maximalen Idealen enthalten, die P enthalten, und wegen der Voraussetzung wäre dann f auch in P , im Widerspruch zu $P_f \neq R_f$. Also ist P ein maximales Ideal. Als nächstes wollen wir die Rückrichtung zeigen. Dazu betrachten wir ein Primideal Q in R sowie den Durchschnitt I aller maximalen Ideale, die Q enthalten, und wir nehmen an, daß $Q \subsetneq I$ gilt. Also existiert ein $f \in I \setminus Q$. Betrachten wir die Menge M aller Primideale in R , die Q enthalten, nicht aber f . Wegen $Q \in M$ ist die Menge nicht leer, und sie ist bezüglich der Inklusion teilgeordnet. Ist eine Kette in M gegeben, so ist ihre Vereinigung wieder ein Primideal, da das Produkt von zwei Elementen

aus der Vereinigung schon in einem der Primideale der Kette liegt. Mithin können wir mit Zorn ein maximales Element P in M wählen. Lokalisieren wir an f , so muß P_f ein maximales Ideal in R_f sein, da alle größeren Primideale in R das Element f enthalten. Dann ist nach unserer Voraussetzung aber auch P ein maximales Ideal in R , das Q enthält, nicht aber f , im Widerspruch zur Wahl von f in I . \square