Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Wintersemester 2016/17, Blatt 14

Kommutative Algebra

Die Aufgaben des Übungsblattes werden nicht mehr in den Übungen besprochen.

Aufgabe 50: [Eine Bewertung auf dem Körper $K\{\{t\}\}$]

Sei $K\{\{t\}\}$ der Körper aus Aufgabe 3.

a. Zeige, dass $\text{ord} : (K\{\{t\}\}^*, *) \longrightarrow (\mathbb{R}, +) : f \mapsto \min\{\alpha \in \mathbb{R} \mid f(\alpha) \neq 0\}$ eine Bewertung ist.

b. R_{ord} ist nicht noethersch und damit ist ord nicht diskret, aber $\dim(R_{\text{ord}}) = 1$.

c. Sind $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ algebraisch unabhängig über $\mathbb{Q}$, so sind $(t^{\alpha_1}, \ldots, t^{\alpha_n})$ algebraisch unabhängig über K. Insbesondere ist $\text{trdeg}_K\big(K\{\{t\}\}\big) = \infty$.

Hinweis zu b.: Beachte, dass $\mathfrak{m}_{R_{\text{ord}}} = \langle t^\alpha \mid \alpha > 0\rangle$, wobei für $t^\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt, dass $t^\alpha(\alpha) = 1$ und $t^\alpha(\beta) = 0$ für $\beta \neq \alpha$.

Aufgabe 51: Sei K ein Körper und $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ eine unabhängige Menge reeller Zahlen. Zeige:

a. $\varphi_{\underline{\alpha}} : K(x_1 \ldots, x_n) \longrightarrow K\{\{t\}\} : \frac{f}{g} \mapsto \frac{f(t^{\alpha_1},\ldots,t^{\alpha_n})}{g(t^{\alpha_1},\ldots,t^{\alpha_n})}$ ist ein K-Algebra*mono*morphismus.

b. $\nu : K(x_1, \ldots, x_n)^* \mapsto \mathbb{R} : h \mapsto (\text{ord} \circ \varphi_{\underline{\alpha}})(h)$ ist eine Bewertung von $K(x_1, \ldots, x_n)$.

c. $1 = \dim(R_\nu) < \text{trdeg}_K\big(K(x_1, \ldots, x_n)\big) - \text{trdeg}_K\big(R_\nu/\mathfrak{m}_{R_\nu}\big) = n$ für $n \geq 2$.

Beachte: $\text{ord} : K\{\{t\}\}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ ist die Bewertung von $K\{\{t\}\}$ aus Aufgabe 50.

Aufgabe 52: Sei R ein Dedekindring und $0 \notin S \subset R$ multiplikativ abgeschlossen. Zeige, dass entweder $S^{-1}R = \text{Quot}(R)$ gilt oder $S^{-1}R$ ein Dedekindring ist.

Aufgabe 53: [Chinesischer Restsatz]
Seien R ein Dedekindring und $I_1, \ldots, I_n \trianglelefteq R$.

a. Zeige, dass die folgende Sequenz exakt ist.

$$R \stackrel{\varphi}{\longrightarrow} \bigoplus_{i=1}^{n} R/I_i \stackrel{\psi}{\longrightarrow} \bigoplus_{i<j} R/(I_i + I_j)$$

Dabei ist $\varphi(x) = (x + I_1, \ldots, x + I_n)$ und $\psi(x_1 + I_1, \ldots, x_n + I_n) = (x_i - x_j + I_i + I_j)_{i<j}$.

b. Seien $x_1, \ldots, x_n \in R$. Zeige, dass es ein $x \in R$ derart gibt, dass genau dann $x \equiv x_i \pmod{I_i}$ für $i = 1, \ldots, n$ gilt, wenn $x_i \equiv x_j \pmod{I_i + I_j}$ für $i \neq j$ ist.

Hinweis zu a.: Lokalisiere bezüglich maximaler Ideale! – Beachte, dass 1.12 durch b. verallgemeinert wird.

Präsenzaufgabe 28: Ist der Ring $\mathbb{C}[x, y]/\langle x^2 - y^2 - y^3\rangle$ ein Dedekindring?

Präsenzaufgabe 29: Ist der Ring $\mathbb{C}[x, y]/\langle x - y^2 - y^3\rangle$ ein Dedekindring?