Aufgaben

PA 19: Finde eine PZ von $I = \langle x^3y^2 - x\cdot y^4\rangle \trianglelefteq K[x,y]$!

Bestimme die PFZ des Erzeugers:

$$x^3\cdot y^2 - x\cdot y^4 = x\cdot y^2\cdot(x^2-y^2) = x\cdot y^2\cdot(x-y)\cdot(x+y)$$

$$\Rightarrow I = \langle x\rangle \cap \langle y^2\rangle \cap \langle x-y\rangle \cap \langle x+y\rangle$$

PA 20: Finde eine PZ von $I = \langle x^2-x, xy-x\rangle \trianglelefteq K[x,y]$

$$I = \langle x\cdot(x-1), x\cdot(y-1)\rangle = \langle x\rangle \cdot \langle x-1, y-1\rangle$$

$$= \langle x\rangle \cap \langle x-1, y-1\rangle = \text{PZ von } I$$

CRS weil die Ideale coprim sind

prim $\Downarrow$ primär

$\Downarrow$

$$\boxed{\mathrm{Min}(I) = \{\langle x\rangle, \langle x-1, y-1\rangle\}}$$

$K = \mathbb{R}$

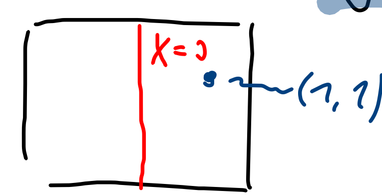
$x^2 - x = x\cdot(x-1) = 0$

$\Rightarrow x = 0$ oder $x = 1$

$xy - x = x\cdot(y-1) = 0$

$\Rightarrow x = 0$ oder $y = 1$

$\Leftarrow$



$$V\left(\bigcap_{i=1}^{n} I_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n} V(I_i)$$

$\subseteq$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\supseteq$

p $\qquad\qquad\qquad\qquad$ p

$\Downarrow$

$f(p) = 0 \quad \forall f \in \bigcap_{i=1}^{n} I_i$

Ang: $p \notin \bigcup_{i=1}^{n} V(I_i)$

$\Rightarrow \forall i \;\; \exists f_i \in I_i \; : \; f_i(p) \neq 0$

$\Rightarrow (f_1 \cdots f_n)(p) = f_1(p) \cdots f_n(p) \neq 0$

$$\begin{array}{c} f_1 \cdots f_n \\ \cap \\ I_1 \cdots I_n \\ \cap| \\ \bigcap_{j=1}^{n} I_j \end{array}$$

$\lightning \quad p \in V(\bigcap I_j)$

$\exists i \; : \; f(p) = 0 \quad \forall f \in I_i$

$$\begin{array}{c} I_i \\ \cup| \\ \bigcap_{j \in 1}^{n} I_j \end{array}$$

$\Downarrow$

$f(p) = 0 \quad \forall f \in \bigcap_{j \in 1}^{n} I_j$

$\Downarrow$

$p \in V\left(\bigcap_{i=1}^{n} I_i\right)$

PA 11: Finde die PZ von $I = \langle x^3 - x^2 - x + 1,\ x^2y - x^2 - 2xy + 2x + y - 1,\ xy + y,\ y^2 - y \rangle \trianglelefteq K[x,y]$.

Ansatz: faktorisiere die Erzeuger

- $y^2 - y = y \cdot (y-1) \overset{!}{=} 0 \Rightarrow y = 0$ oder $y = 1$
- $xy + y = y \cdot (x+1) \overset{!}{=} 0 \Rightarrow y = 0$ oder $x = -1$
- $x^3 - x^2 - x + 1 = (x-1)^2 \cdot (x+1) \overset{!}{=} 0 \Rightarrow x = 1$ oder $x = -1$
- $x^2y - x^2 - 2xy + 2x + y - 1 = (y-1)\cdot(x-1)^2 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow y = 1$ oder $x = 1$

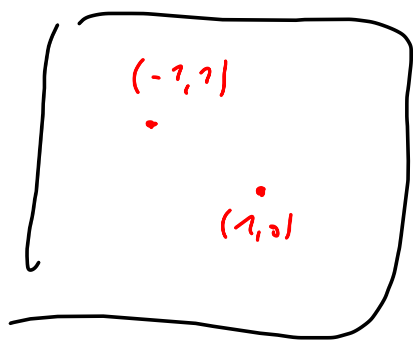
$$I = \langle (y-1)\cdot(x-1)^2,\ (x-1)^2\cdot(x+1),\ y\cdot(x+1),\ y\cdot(y-1) \rangle$$

$$= \langle x+1,\ y-1 \rangle \cdot \langle (x-1)^2,\ y \rangle$$

$$\overset{\text{CRS}}{=} \underbrace{\langle x+1,\ y-1 \rangle \cap \langle (x-1)^2,\ y \rangle}_{\text{PZ von } I}$$

1. Fall: $y = 0$, $x = 1$

2. Fall: $y = 1$, $x = -1$



$$\operatorname{Min}(I) = \{ \langle x+1,\ y-1 \rangle,\ \langle x-1,\ y \rangle \} = \operatorname{Ass}(I)$$

PA 17: $R = \mathbb{C}[x,y]/I$, $\quad I = \langle x^3 - x^2,\ x^2y + 2x^2,\ xy - y,\ y^2 + 2y\rangle$

$= \langle x^2, y\rangle \cdot \langle x-1, y+2\rangle \underset{CRS}{=} \langle x^2, y\rangle \cap \langle x-1, y+2\rangle$ PZ von I

$\Downarrow$ CRS

$R \cong \mathbb{C}[x,y]/\langle x^2,y\rangle \oplus \mathbb{C}[x,y]/\langle x-1,y+2\rangle$

$\| \quad \mathbb{C}[x,y]/I$

lokal artinsch ✓

Zeige: R ist artinsch

- $\mathbb{C}[x,y]$ ist noeth. $\Rightarrow \mathbb{C}[x,y]/I$ ist noethersch
- Zzg: $\dim R = 0$

Sei $P \in \operatorname{Spec}(\mathbb{C}[x,y])$ mit $I \subseteq P$

$\Rightarrow$
- $x\cdot x\cdot(x-1) = x^3 - x^2 \in P \Rightarrow x \in P$ oder $x-1 \in P$
- $x\cdot x\cdot(y+2) = x^2y + 2x^2 \in P \Rightarrow x \in P$ oder $y+2 \in P$
- $y\cdot(x-1) = xy - y \in P \Rightarrow y \in P$ oder $x-1 \in P$
- $y\cdot(y+2) = y^2 + 2y \in P \Rightarrow y \in P$ oder $y+2 \in P$

1. Fall: $x \in P \Rightarrow x-1 \notin P \Rightarrow y \in P \Rightarrow P = \langle x, y\rangle$

2. Fall: $x \notin P \Rightarrow x-1 \in P \Rightarrow y+2 \in P$

$\Rightarrow y \notin P \Rightarrow P = \langle y+2, x-1\rangle$.

Also: $\operatorname{Spec}(R) = \{\langle \bar{x}, \bar{y}\rangle, \langle \overline{x-1}, \overline{y+2}\rangle\} = \operatorname{Max-Spec}(R) \Rightarrow \dim(R)$

Argumente: $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2 \trianglelefteq R$, $\mathfrak{m}_1 = \sqrt{I_1}$, $\mathfrak{m}_2 = \sqrt{I_2}$, $\mathfrak{m}_1 \neq \mathfrak{m}_2$

$\Rightarrow$ I_1 & I_2 coprim, d.h. $I_1 + I_2 = R$

Bew.: Ang.: $I_1 + I_2 \neq R$

$\Rightarrow \exists\, \mathfrak{m} \trianglelefteq R$: $\underset{\underset{I_1,\, I_2}{\cup\!\shortmid}}{I_1 + I_2} \subseteq \mathfrak{m}$

$\Rightarrow \underset{\underset{\mathfrak{m}_1}{\shortparallel}}{\sqrt{I_1}} \subseteq \sqrt{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m} = \sqrt{\mathfrak{m}} \supseteq \underset{\underset{\mathfrak{m}_2}{\shortparallel}}{\sqrt{I_2}}$

$\Rightarrow \mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m} = \mathfrak{m}_2$ $\lightning$ $\mathfrak{m}_1 \neq \mathfrak{m}_2$ $\square$

PA 18: $R = K[x]_{\langle x \rangle} = \{ \frac{f}{g} \mid f,g \in k[x],\ g(0) \neq 0 \}$

Ist $M = K(x) = \{ \frac{f}{g} \mid f,g \in k[x],\ g \neq 0 \}$ ein noetherscher R-Modul?

Ang: M wäre noeth. $\Rightarrow$ M ist als R-Modul endl. erz.

R ist lokal mit maximalem Ideal $m = \langle x \rangle$

$\Rightarrow m \cdot M = \langle x \rangle \cdot K(x) = \{ \frac{x \cdot f}{g} \mid f,g \in K[x],\ g \neq 0 \} = K(x) = M$

$\underset{NAK}{\Rightarrow} M = 0$ ↯

Also: M nicht noeth.

Alternativ: $M = \langle f_1, \dots, f_k \rangle_R$ **Zeige:** $\frac{1}{x^n} \notin M$ für n groß genug

PA 16: • $R = K[x,y]$, $\quad P = K[x,y,z]/I$, $\quad I = \langle xz - x,\ yz - y - z - 1\rangle$

PA 15 $\Rightarrow$ P ist nicht flach als R-Modul

Denn: $R \xhookrightarrow{\cdot f \neq 0} R$ weil R ein IB

Idee: finde $0 \neq f \in R$, das in P Nullteiler ist

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "\cdot f"] \arrow[d, phantom, "\parallel"] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & P \arrow[d, phantom, "\parallel"] \\
R \otimes_R P \arrow[r, "\cdot f \otimes \mathrm{id}_P"'] & R \otimes_R P
\end{tikzcd}$$

$\Rightarrow$ $P \xrightarrow{\cdot f} P$ ist NICHT injektiv

Bestimmung der NT in P durch PZ von I:

$I = \langle x\cdot(z-1),\ (y-1)\cdot(z-1)\rangle = \langle x, y-1\rangle \cdot \langle z-1\rangle \subseteq Q \in \mathrm{Spec}(K[x,y,z])$

$\Rightarrow$ $\langle x, y-1\rangle \subseteq Q$ oder $\langle z-1\rangle \subseteq Q$ $\Rightarrow$ $\mathrm{Min}(I) = \{\langle x, y-1\rangle, \langle z-1\rangle\}$

$\Rightarrow$ $\langle \bar{x}, \bar{y}-1\rangle \cup \langle \bar{z}-1\rangle \subseteq NT(P)$

Also: $f = x$ tut's

• $m = \langle x, y\rangle$ s. R

Gilt: P_m als R_m-Modul ist flach?

Beweis: $I = \langle x\cdot(z-1), (y-1)\cdot(z-1)\rangle$, $\mathfrak{m} = \langle x, y\rangle \trianglelefteq K[x,y] = R$

$\Rightarrow \quad y-1 \in (R_{\mathfrak{m}})^{*} \quad \Rightarrow \quad I_{\mathfrak{m}} = \langle x\cdot(z-1), z-1\rangle_{R_{\mathfrak{m}}}$

$\langle x\cdot(z-1), z-1\rangle_{R_{\mathfrak{m}}} = \langle z-1\rangle_{R_{\mathfrak{m}}} = \langle z-1\rangle_{\mathfrak{m}}$

$$\Rightarrow P_{\mathfrak{m}} = \left(K[x,y,z]/I\right)_{\mathfrak{m}} \cong K[x,y,z]_{\mathfrak{m}}/I_{\mathfrak{m}}$$

$$= K[x,y,z]_{\mathfrak{m}}/\langle z-1\rangle_{\mathfrak{m}} \cong \left(K[x,y,z]/\langle z-1\rangle\right)_{\mathfrak{m}} \cong K[x,y]_{\mathfrak{m}} = R_{\mathfrak{m}}$$

$$\begin{aligned} x &\longmapsto x \\ y &\longmapsto y \\ z &\longmapsto 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow P_{\mathfrak{m}}$ ist frei $\Rightarrow P_{\mathfrak{m}}$ flach als $R_{\mathfrak{m}}$-Modul