Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus

Thomas Markwig
Fachbereich Mathematik
Technische Universität Kaiserslautern

Vorlesungsskript

Oktober 2008

Inhaltsverzeichnis

1. Mengenlehre 1

Literatur 20

1 Mengenlehre

A) Axiome der Mengenlehre

Die zentrale Frage, die uns in diesem Kapitel beschäftigt lautet:

Was ist eine Menge?

Unsere Betrachtungen orientieren sich an der Darstellung in [Ebb92, Kapitel 14].

Der jahrelange Umgang mit diesem Begriff in der Schule und an der Universität gibt uns ein recht gutes Gefühl dafür, was wir unter einer Menge verstehen, und liefert uns eine Vielzahl an Beispielen. Sollen wir aber in klare, knappe Worte fassen, was eine Menge ist, stellt sich heraus, daß dies eine sprachliche und begriffliche Herausforderung ist.

Georg Cantor führte den Begriff der Menge im 19. Jahrhundert folgendermaßen ein:

> *Unter einer Menge verstehen wir jede Zusammenfassung* M *von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unsrer Anschauung oder unseres Denkens (welche die Elemente von* M *genannt werden) zu einem Ganzen.*

Seine Definition drückt die wesentlichen Gesichtspunkte dessen aus, was wir unter einer Menge verstehen wollen:

- eine Menge besteht aus vielen Elementen;
- je zwei Elemente unterscheiden sich.

Zudem sagt sie etwas darüber aus, welcher Art die Elemente einer Menge sein können: Objekte unserer Anschauung (diese sind greifbar) oder unseres Denkens (diese sind abstrakt).

Mit dieser Begriffsbildung kann man eine Menge dadurch angeben, daß man ihre Elemente auflistet – eine im allgemeinen wenig effiziente Möglichkeit. Häufig beschreibt man die Elemente einer Menge lieber durch ihre Eigenschaften, z.B. die Menge aller roten Autos, in Symbolen

$$\{x \mid x \text{ ist ein rotes Auto}\}.$$

Das scheint ein sinnvolles und zulässiges Vorgehen zu sein, und *Friedrich Ludwig Gottlob Frege* nannte das Prinzip, die Elemente einer Menge durch Angabe einer Eigenschaft zu charakterisieren, *Komprehension.* Das Prinzip birgt jedoch Gefahren in sich. Läßt man Komprehension in ihrer vollen Allgemeinheit zu, so ist auch

$$\mathsf{X} = \{\mathsf{M} \mid \mathsf{M} \text{ ist eine Menge}\}$$

eine Menge, die *Menge aller Mengen.* Wenn X eine Menge ist, so ist X zugleich ein Element von sich selbst, es gilt also $\mathsf{X} \in \mathsf{X}$. Eine Beziehung, die nur schwer vorstellbar ist.

Wenden wir das Prinzip der Komprehension etwas geschickter an, so können wir einen offensichtlichen Widerspruch herleiten.

$$\mathsf{Y} = \{\mathsf{M} \mid \mathsf{M} \textit{ ist Menge}, \mathsf{M} \notin \mathsf{M}\}$$

ist dann die Menge aller Menge, die sich nicht selbst als Element enthalten. Die Menge Y ist aber ein echtes Problem. Es gilt entweder $\mathsf{Y} \in \mathsf{Y}$ oder $\mathsf{Y} \notin \mathsf{Y}$. Tritt der erste Fall ein, so ist Y eine Menge, die sich selbst als Element enthält, und somit ist Y kein Element von Y, da Y nur solche Mengen enthält, die sich nicht selbst als Element enthalten. Gilt umgekehrt $\mathsf{Y} \notin \mathsf{Y}$, so ist Y eine Menge, die sich nicht selbst enthält, und mithin ist Y aufgrund der Beschreibung von Y ein Element von Y. Beide Fälle führen also zu einem Widerspruch. Mithin ist die Beschreibung von Y nicht zulässig, um eine Menge zu beschreiben. Mit diesem als *Russelsches Paradoxon* oder *Russelsche Antinomie* bekannten Problem, zeigte Bertrand Russel 1901 auf, daß Komprehension in der allgemeinen Form, wie Frege sie forderte, unzulässig ist.

Es erweist sich also als notwendig, klarer zu fassen, welchen Gesetzmäßigkeiten Mengen genügen müssen und wie man aus gegebenen Mengen neue Mengen bilden können soll. Dies führt uns zum *Axiomensystem der Mengenlehre nach Zermelo und Fraenkel*, das in seiner ersten Form von *Ernst Zermelo* im Jahre 1908 aufgestellt wurde. Wir werden die Axiome nach und nach einführen und uns dabei fragen, welche grundlegenden Konstruktionen sich aus den jeweils eingeführten Axiomen ableiten lassen.

Eine Menge soll auch nach der Einführung der Axiome noch eine Zusammenfassung von wohlunterschiedenen Objekten sein, und zum Aufbau der Mengenlehre kann man nun zwei verschiedene Standpunkte einnehmen. Entweder man läßt Objekte zu, die selbst nicht Zusammenfassung anderer Objekte sind, und sieht diese als sogenannte *Urelmente* der Theorie an, oder man baut die Theorie gänzlich ohne solche Urelemente auf. Der Vorteil von letzterem Zugang liegt auf der Hand, man muß sich keine Gedanken darum machen, was man als Urelement zuläßt. Man erkauft sich diesen Vorteil aber teuer, da die Begriffswelt abstrakter wird und letztlich als Elemente von Mengen nur wieder andere Mengen zulässig sind. Die Anschauung geht verloren und wir können nicht mehr von der Menge der roten Autos sprechen.

Zermelo und Fraenkel wollen ohne Urelemente auskommen und deshalb benötigen sie zunächst ein Axiom, das sicher stellt, daß es überhaupt eine Menge gibt.

1) Existenzaxiom (Ex)
Es gibt eine Menge.

Im Gegensatz zu Zermelo und Fraenkel liegt mir jedoch sehr viel daran die Anschauung nicht zu verlieren. Deshalb werde ich bei der Formulierung der weiteren Axiome nicht davon ausgehen, daß die Elemente einer Menge zwangsläufig wieder Mengen sind. Ich denke mir die Welt der Mengelehre lieber voller interessanter und bunter Urelemente.

Cantors Grundidee, daß eine Menge die Zusammenfassung *wohlunterschiedener* Objekte ist, spiegelt sich in folgendem Axiom wieder, das festlegt, daß eine Menge durch ihre Elemente festgelegt ist.

2) Extensionalitätsaxiom (Ext)
Zwei Mengen, die die gleichen Elemente enthalten, sind gleich.

Damit sind wir wieder so weit, wie wir vor der Betrachtung des Komprehensionsprinzips waren. Wir würden Mengen nun gerne durch Angabe einer Eigenschaft ihrer Elemente beschreiben können. Dazu schwächen wir das Komprehensionsprinzip etwas ab.

3) Aussonderungsaxiom (Aus)
Ist M *eine Menge und* E *eine Eigenschaft, dann gibt es eine Menge*

$$\{\mathsf{m} \in \mathsf{M} \mid \mathsf{m} \text{ hat die Eigenschaft } \mathsf{E}\}$$

die genau die Elemente aus M *enthält, die die Eigenschaft* E *haben.*

Der wesentliche Unterschied zum Komprehensionsprinzip besteht darin, daß die m, die wir durch die Eigenschaft E aussondern und dann zusammenfassen, bereits Elemente einer gegebenen Menge M sein müssen. Sie leben sozusagen bereits in einem Universum, das eine Menge ist. Folgt man nun der Argumentation der Russelschen Antinomie, so erhält man unmittelbar, daß in der Zermelo-Fraenkelschen Mengenlehre die Zusammenfassung X aller Mengen keine Menge mehr ist, da sonst auch

$$\mathsf{Y} = \{\mathsf{M} \in \mathsf{X} \mid \mathsf{M} \notin \mathsf{M}\}$$

nach **Aus** eine Menge wäre und wir den gleichen Widerspruch wir oben erhalten würden.

Wir verzichten hier darauf, näher zu erläutern was eine *Eigenschaft* im Sinne des Aussonderungsaxioms ist, sprich welche sprachlichen Elemente zur Formulierung einer solchen Eigenschaft erlaubt sind. Solange ich Autos als Elemente von Mengen zulasse, ist rot zu sein eine durchaus zulässige Eigenschaft. Will man wie Zermelo und Fraenkel ohne Urelemente auskommen, so wird man in der Wahl der sprachlichen Elemente etwas restriktiver sein. Der interessierte Leser sei auf [Ebb92, Kapitel 14], [Koe96] oder [Jen00] verwiesen.

Das Existenzaxiom liefert Zermelo und Fraenkel zwar die Existenz einer Menge, aber man kennt damit zunächst noch keine Menge explizit. Das ändert sich, wenn man **Ex** mit **Aus** kombiniert.

Folgerung 1.1 (Leere Menge)
Es gibt genau eine Menge $\emptyset$*, die kein Element enthält.*

Beweis: Nach **Ex** gibt es eine Menge M, und wegen **Aus** gibt es deshalb die Menge

$$\{\mathsf{m} \in \mathsf{M} \mid \mathsf{m} \notin \mathsf{M}\}.$$

Diese Menge enthält kein Element. Wegen **Ext** ist sie eindeutig bestimmt. □

Auch können wir schon einfache Mengenoperationen wie den Durchschnitt oder die Differenz zweier Mengen einführen.

Folgerung 1.2 (Durchschnitt)
Sind M *und* N *Mengen, so gibt es eine Menge* $M \cap N$ *die genau die Elemente enthält, die sowohl in* M *als auch in* N *liegen.*

Beweis: Wir können $M \cap N$ mit Hilfe von **Aus** definieren als die Menge

$$M \cap N = \{m \in M \mid m \in N\}.$$

□

Folgerung 1.3 (Durchschnitt)
Sind M *und* N *Mengen, so gibt es eine Menge* $M \backslash N$ *die genau die Elemente enthält, die in* M *aber nicht in* N *liegen.*

Beweis: Wir können $M \setminus N$ mit Hilfe von **Aus** definieren als die Menge

$$M \cap N = \{m \in M \mid m \notin N\}.$$

□

Wir sollten betonen, daß bei den Definitionen, die in den Beweisen der obigen Folgerung vorgenommen wurden, das Axiom **Aus** stets nur sichergestellt hat, daß die angegebene Zusammenfassung wirklich eine Menge im Sinne der Mengenlehre von Zermelo und Fraenkel ist.

Wir würden die Vereinigung zweier Mengen M und N ebenfalls gerne wie oben definieren können, etwa als

$$\{m \mid m \in M \text{ und } m \in N\}.$$

In dieser Formulierung geht das aber nicht, da wir das Komprehensionsprinzip nicht zur Verfügung haben und eine Anwendung von **Aus** verlangt, daß die betrachteten m schon aus einer Menge genommen werden, sprich es verlangt bereits die Existenz einer Menge, die sowohl die Elemente von M, als auch die von N enthält. Unsere bisherigen Axiome reichen nicht aus, um die existenz einer solchen Menge zu sichern. Wir müssen das Axiomensystem erweitern, und wir führen hierzu gleich zwei neue Axiome ein.

4) Paarmengenaxiom (Par)
Sind M, N *zwei Mengen, dann gibt es eine Menge* $\{M, N\}$*, die genau die Elemente* M *und* N *enthält.*

5) Vereinigungsaxiom ($\cup$**-Ax)**
Ist M *eine Menge, deren Elemente Mengen sind, so gibt es eine Menge*

$$\bigcup_{A \in M} A = \{x \mid \exists\, A \in M \ : \ x \in A\}$$

deren Elemente genau die Elemente der Elemente von M *sind.*

Damit können wir nun die Existenz der Vereinigung zweier Mengen M und N folgern.

Folgerung 1.4
Sind M und N Mengen, so gibt es eine Menge $M \cup N$, die genau die Elemente von M und N als Elemente enthält.

Beweis: Nach **Par** gibt es die Menge $X = \{M, N\}$ und nach $\cup$-**Ax** enthält die Menge

$$\bigcup_{A \in X} A$$

genau die Elemente von M und N als Elemente. □

Wir können aus $\cup$-**Ax** auch die Existenz des allgemeinen Schnittes von Mengen zeigen.

Folgerung 1.5 (Allgemeiner Durchschnitt)
Sei X eine Menge von Mengen, dann gibt es die Menge

$$\bigcap_{A \in X} A := \{x \mid x \in A \ \forall \ A \in X\}$$

der Elemente, die in allen Elementen von X liegen.

Beweis: Wegen $\cup$-**Ax** existiert die Vereinigung

$$Y = \bigcup_{A \in X} A$$

als Menge, und der oben beschriebene Durchschnitt ist dann gerade

$$\{x \in Y \mid \ x \in A \ \forall \ A \in X\},$$

was wegen **Aus** eine Menge ist. □

Da nach **Ext** eine Menge durch ihre Elemente festgelegt ist, kann man den Begriff der *Teilmenge* einführen.

Definition 1.6
Es seien M und N Mengen. Dann heißt M eine *Teilmenge* von N, wenn für jedes Element $m \in M$ auch $m \in N$ gilt. Wir schreiben dann kurz $M \subseteq N$. Gilt für eine Teilmenge N von M zudem $N \neq M$, so nennen wir N eine *echte Teilmenge* und schreiben $N \subsetneqq M$.

Zu einer gegebenen Menge M kann man sich nun die Gesamtheit aller Teilmengen anschauen, und wir sind es gewohnt, daß die Zusammenfassung dieser wieder eine Menge ist, die sogenannte *Potenzmenge* von M. Die bisherigen Axiome geben die noch nicht her, so daß wir unser Axiomensystem wieder erweitern müssen.

6) Potenzmengenaxiom (Pot)
Ist M eine Menge, so gibt es die Menge

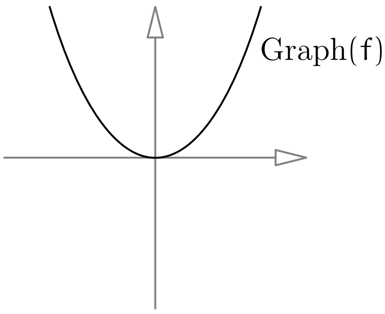
$$\mathrm{Pot}(M) = \{A \mid A \subseteq M\}$$

aller Teilmengen von M.

In jeder mathematischen Theorie betrachtet man neben den Grundobjekten, die in aller Regel Mengen mit zusätzlicher Struktur sind, Abbildungen zwischen diesen, die nach Möglichkeit diese zusätzliche Struktur erhalten. Dazu müssen wir nun zunächst den Begriff der Abbildung an sich mit Hilfe mengentheoretischer Mittel einführen. Unserer Vorstellung zufolge soll eine Abbildung den Elementen einer Menge in eindeutiger Weise Elemente einer anderen Abbildung zuordnen. Ein gängiges Beispiel aus der Schulmathematik ist die Abbildung

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2.$$

Sie ist festgelegt durch ihren Definitionsbereich, hier $\mathbb{R}$, ihren Zielbereich, hier ebenfalls $\mathbb{R}$, und die Abbildungsvorschrift, hier $x \mapsto x^2$ oder $f(x) = x^2$. Bei Abbildungen dieser Art sind wir es gewohnt, den Graphen der Abbildung zu zeichnen:



Dabei definiert man den Graphen von f als die Menge der Tupel $\big(x, f(x)\big)$, wobei x alle Elemente des Definitionsbereiches durchläuft. Der Graph einer Abbildung ist also eine Teilmenge des kartesischen Produktes des Definitionsbereiches mit dem Zielbereich. In der Tat reicht der Graph als Teilmenge dieses kartesischen Produktes auch aus, um die Abbildung im oben erwähnten Sinn vollständig zu beschreiben: sie enthält die Angabe des Definitions- und des Zielbereiches, und zu jedem Punkt x im Definitionsbereich gibt es genau einen Punkt (x, y) im Graphen, so daß notwendigerweise $f(x) = y$ gelten muß. Wir können mithin am Graphen die Abbildungsvorschrift ablesen. Dieses Zusammenspiel wollen wir uns nun zunutze machen, um allein mit den bisher eingeführten Mitteln der Mengenlehre zu definieren, was eine Abbildung ist.

Zunächst benötigen wir dazu das kartesische Produkt zweier Mengen. Insbesondere müssen wir also definieren, was ein Tupel von zwei Elementen einer Menge sein soll. Was unterscheidet ein Tupel (x, y) von der Menge $\{x, y\}$? x und y dürfen übereinstimmen, und falls sie nicht übereinstimmen, so soll die Reihenfolge festgelegt sein, in der sie auftauchen. Dies bedeutet für zwei Tupel

$$(x, y) = (x', y') \quad \Longleftrightarrow \quad x = x' \text{ und } y = y'.$$

Unsere Definition eines Tupels sollte diese Eigenschaft also wiederspiegeln.

Folgerung 1.7 (Tupel)
Es sei M eine Menge. Für $x, y \in M$ ist das Tupel

$$(x, y) := \big\{\{x\}, \{x, y\}\big\}$$

eine Menge, und es gilt

$$(x,y) = (x',y') \iff x = x' \text{ und } y = y'. \tag{1}$$

für $x, y, x', y' \in M$.

Beweis: Zuerst müssen wir zeigen, daß $\{\{x\},\{x,y\}\}$ eine Menge ist. Mit Hilfe des Aussonderungsaxioms **Aus** wissen wir, daß

$$\{x\} = \{m \in M \mid m = x\}$$

und

$$\{x,y\} = \{m \in M \mid m = x \text{ oder } m = y\}$$

Mengen sind. Das Paarungsaxiom **Par** liefert uns mithin die Existenz der Menge $\{\{x\},\{x,y\}\}$.

Um die beschriebene Eigenschaft (1) von Tupeln zu zeigen, betrachten wir zunächst den Fall $x = y$, so daß $(x,y) = \{\{x\}\}$. Nach **Ext** gilt dann:

$$\begin{aligned}\{\{x\}\} = (x,y) = (x',y') = \{\{x'\},\{x',y'\}\} &\iff \{x\} = \{x'\} = \{x',y'\}\\ &\iff x = y = x' = y'.\end{aligned}$$

Der Fall $x' = y'$ folgt analog, so daß wir $x \neq y$ und $x' \neq y'$ annehmen können. Nach **Ext** wissen wir dann, daß $\{x\} \neq \{x',y'\}$ und $\{x,y\} \neq \{x'\}$, so daß **Ext** uns folgende Äquivalenz liefert:

$$\begin{aligned}(x,y) = (x',y') &\iff \{\{x\},\{x,y\}\} = \{\{x'\},\{x',y'\}\}\\ &\iff \{x\} = \{x'\} \text{ und } \{x,y\} = \{x',y'\}\\ &\iff x = x' \text{ und } y = y'.\end{aligned}$$

□

Wir können nun das kartesische Produkt zweier Mengen definieren.

Folgerung 1.8 (Kartesisches Produkt)
Sind M *und* N *Mengen, dann gibt es die Menge*

$$M \times N = \{(m,n) \mid m \in M, n \in N\}, \tag{2}$$

die genau aus den Tupeln der Form (m,n) *mit* $m \in M$ *und* $n \in N$ *besteht.*

Beweis: Nach Folgerung 1.4 gibt es die Menge $M \cup N$ und durch zweimaliges Anwended des Potenzmengenaxioms **Pot** erhalten wir die Menge

$$\mathrm{Pot}\big(\mathrm{Pot}(M \cup N)\big).$$

Da für $m \in M$ und $n \in N$ die beiden Mengen $\{m\}$ und $\{m,n\}$ Teilmengen von $M \cup N$, d.h. Elemente von $\mathrm{Pot}(M \cup N)$ sind, ist

$$(m,n) = \{\{m\},\{m,n\}\} \in \mathrm{Pot}\big(\mathrm{Pot}(M \cup N)\big).$$

Wir können mithin die Menge $M \times N$ mit Hilfe von **Aus** definieren als

$$M \times N = \Big\{ A \in \mathrm{Pot}\left(\mathrm{Pot}(M \cup N)\right) \Bigm| \exists\, m \in M, n \in N \;:\; A = \big\{\{m\}, \{m, n\}\big\} \Big\}.$$

Dies ist aber genau die in (2) beschriebene Menge. □

Die Definition eines Tupels und des kartesischen Produktes ist ausgesprochen unhandlich, aber glücklicherweise benötigen wir diese fortan auch nicht mehr. Stattdessen können wir jetzt die bekannte Beschreibung von $M \times N$ in (2) verwenden, und wann immer wir mit Tupeln arbeiten, benötigen wir in der Tat nur die Eigenschaft (1).

Unser Ziel war es, mit Hilfe des kartesischen Produktes des Begriff der Abbildung einzuführen.

Definition 1.9
Eine Abbildung G von M nach N ist eine Teilmenge von $M \times N$, so daß es für jedes $m \in M$ genau ein $n \in N$ gibt mit $(m, n) \in G$. Wir setzen dann $G(m) := n$, und wir schreiben in gewohnter Weise $G : M \longrightarrow N$, um auszudrücken, daß G eine Abbildung von M nach N ist.

Man beachte, daß G das ist, was wir für gewöhnlich den Graphen der Abbildung nennen. Aber wie oben erwähnt, charakterisiert der eine Abbildung auch in dem uns geläufigen Sinn.

Wenn man eine Abbildung $G : M \longrightarrow N$ hat, so möchte man gerne auch vom Bild der Abbildung oder dem Bild einer Teilmenge von M unter der Abbildung sprechen können. Ist dieses wieder eine Menge?

Folgerung 1.10 (Bild)
Es seien M und N Mengen, $G : M \longrightarrow N$ sei eine Abbildung und $A \subseteq M$ sei eine Teilmenge von M. Dann ist

$$G(A) = \{n \in N \mid \exists\, m \in A \;:\; (m, n) \in G\}$$

eine Menge, das Bild A unter G.

Beweis: Dies folgt unmittelbar aus dem Aussonderungsaxiom **Aus**. □

Wir sind es gewohnt, in der Mathematik immer wieder Objekte mit Indizes zu versehen, z.B. von Mengen $M_1, \ldots, M_k$ zu sprechen. Auch diese Inidzierung muß sauber definiert werden. Dabei können wir die Objekte nicht einfach in eine Menge packen und z.B. von der Menge $M = \{M_1, \ldots, M_k\}$ sprechen, da die M_i ja nicht verschieden sein müssen! Die Menge M hilft uns aber doch weiter, wenn wir zudem die Menge der Indizes betrachten, in unserem Fall $N = \{1, \ldots, k\}$, und dann die Abbildung

$$G : N \longrightarrow M : i \mapsto M_i.$$

Diese Reinterpretation dessen, was die Schreibweise $M_1, \ldots, M_k$ bedeutet, liefert uns den Begriff der *Familie von Mengen* oder allgemeiner der Familie von Objekten.

Definition 1.11
Sind M und N Mengen, so heißt eine Abbildung

$$G : N \longrightarrow M$$

auch eine *Familie* von Elementen von M, und wir verwenden für $n \in N$ auch die Notation

$$G_n = G(n) \in M.$$

Oft schreiben wir auch $(G_n)_{n\in N}$, für die Familie.

Ohne daß wir bereits definiert hätten, was es bedeutet, daß eine Menge *endlich* ist, ist vom intuitiven Standpunkt aus doch klar, daß die obigen Axiome und Konstruktionen uns nicht aus dem Bereich der endlichen Mengen hinaus führen, wenn wenn wir mit endlichen Mengen starten. Mathematik allein mit endlichen Mengen wäre jedoch allzu langweilig. Da wir mit den obigen Mitteln keine unendlichen Mengen konstruieren können, müssen wir die Existenz einer solchen voraussetzen. Dazu müssen wir zunächst einmal definieren, wann eine Menge *unendlich* heißt.

Was unterscheidet vom naiven Standpunkt aus eine unendliche Menge von einer endlichen? Dies verdeutlicht man am einfachsten am Beispiel des Hilbertschen Hotels. Dieses Hotel hat für jede natürliche Zahl ein Zimmer mit dieser Zimmernummer. In der Stadt, in der das Hilbertsche Hotel steht, findet ein furchtbar wichtiges Fußballspiel statt und das Hotel ist ausgebucht, als spät abends ein weiterer Gast an die Rezeption kommen und ein Zimmer möchte. Da alle anderen Hotels ebenfalls ausgebucht sind, entscheidet sich der Hotelmanager zu einer ungewöhnlichen Lösung, der Gast bekommt sein Zimmer, die anderen Gäste müssen nur die Unbequemlichkeit eines Zimmerwechsels in Kauf nehmen. Der Gast aus Zimmer 0 muß in Zimmer 1 wechseln, der aus Zimmer 1 in Zimmer 2, der aus Zimmer 2 in Zimmer 3, usw.. Da es unendlich viele Zimmer gibt, ist das möglich. In einem Hotel mit nur endlich vielen Zimmern ginge das nicht. Man kann das Verfahren, das der Hotelmanager wählt, mathematisch ausdrücken: die Abbildung

$$\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \setminus \{0\} : n \mapsto n + 1$$

ist eine *injektive Abbildung* der Menge der natürlichen Zahlen auf eine *echte* Teilmenge. Für endliche Mengen ist dies nicht möglich. Die Existenz einer solchen Abbildung charakterisiert also unendliche Mengen, und wir können sie deshalb verwenden, um den Begriff einzuführen.

Definition 1.12
Es seien M und N zwei Mengen.

a. Eine Abbildung G von M nach N heißt *injektiv*, wenn aus $G(m) = G(m')$ stets $m = m'$ folgt.

b. M heißt *unendlich*, wenn es eine injektive Abbildung $G : M \longrightarrow M$ mit $G(M) \subsetneqq M$ gibt. Eine nicht unendliche Menge heißt *endlich*.

7) Unendlichkeitsaxiom (Inf)
Es gibt eine unendliche Menge.

Es mag überraschen, aber wir müssen in der von uns geschaffenen Mengenlehre zunächst zeigen, daß die leere Menge nicht unendlich ist!

Folgerung 1.13
Die leere Menge ist nicht unendlich.

Beweis: Ist $A \subseteq \emptyset$ eine Teilmenge der leeren Menge, so enthält A kein Element, da jedes Element von A in $\emptyset$ liegen müßte. Wegen **Ext** ist A dann aber gleich $\emptyset$, so daß die leere Menge keine echte Teilmenge enthält. Mithin kann es auch keine injektive Abbildung auf eine echte Teilmenge geben. $\square$

Damit wissen wir also, daß es sowohl unendliche als auch endliche Mengen gibt. Von der Anzahl an Elementen in einer Menge können wir aber noch nicht sprechen, da uns dazu bislang die natürlichen Zahlen fehlen. Wäre es nicht schön, wenn wir wüßten, daß es sie in der Tat gibt? D.h., daß es in unserem Axiomensystem eine Menge gibt, die die Eigenschaften der natürlichen Zahlen hat?

Definition 1.14
Wir nennen eine Menge M *minimal induktiv*, wenn es ein Element $0 \in M$ und eine Abbildung S von M nach M gibt, so daß folgendes gilt:

(1) S ist injektiv.
(2) $0 \notin S(M)$.
(3) Ist $A \subseteq M$ mit $0 \in A$ und $S(A) \subseteq A$, so ist $A = M$.

Die Abbildung S nennt man dann die *Nachfolgerfunktion* und 0 den *Startwert*.

Also Modell für eine minimal induktive Menge sollte man die natürlichen Zahlen vor Augen haben, wobei die Nachfolgerfunktion einer Zahl n ihren Nachfolger, d.h. die Zahl $n+1$, zuordnet. Wir werden später sehen, daß in gewisser Weise die natürlichen Zahlen die einzige minimal induktive Menge sind.

Satz 1.15 (Existenz der natürlichen Zahlen)
Es gibt genau dann eine unendliche Menge, wenn es eine minimal induktive Menge gibt.

Beweis: Wenn es eine minimal induktive Menge M gibt, so besitzt sie aufgrund der Eigenschaften (1) und (2) eine injektive Selbstabbildung auf eine echte Teilmenge und ist mithin unendlich gemäß unserer Definition.

Wir wollen nun aus der Existenz einer unendlichen Menge M die Existenz einer minimal induktiven Menge ableiten. Da M unendlich ist, gibt es eine eine injektive Abbildung $G : M \longrightarrow M$ mit $G(M) \subsetneqq M$. Insbesondere gibt es also ein Element in M, das nicht in $G(M)$ liegt. Wir nennen dieses Element 0. Das Aussonderungsaxiom

Aus und das Potenzmengenaxiom **Pot** liefern uns nun die Existenz der Menge

$$X = \big\{A \in \mathrm{Pot}(M) \mid 0 \in A, G(A) \subseteq A\big\}.$$

Dann können wir den allgemeinen Durchschnitt Folgerung 1.5 anwenden, um die Menge

$$I = \bigcap_{A \in X} A$$

zu bilden. Es reicht zu zeigen, daß diese Menge minimal induktiv ist.

Dazu benötigen wir zunächst eine Nachfolgerfunktion auf I. Ist $A \in X$, so ist $I \subseteq A$ und mithin folgt aus der Definition des Bildes unmittelbar, daß $G(I) \subseteq G(A)$. Nach Voraussetzung ist aber $G(A) \subseteq A$ und damit auch $G(I) \subseteq A$. Dann ist aber jedes Element von $G(I)$ im Durchschnitt aller $A \in X$ enthalten, d.h. $G(I) \subseteq I$. Damit gibt es zu jedem $x \in I$ genau ein $y \in I$ mit $(x, y) \in G$, und

$$S = \{(x, y) \in I \times I \mid (x, y) \in G\}$$

ist eine Abbildung von I nach I.

Nach Definition von X ist $0 \in A$ für alle $A \in X$, und somit ist $0 \in I$ ein Element des Durchschnittes aller A nach Folgerung 1.5.

Da die Abbildung G injektiv ist und da für $(x, y), (x', y) \in S$ zudem $(x, y), (x', y) \in G$ gilt, folgt $x = x'$. Dies zeigt die Eigenschaft (1).

Nach Definition von S gilt

$$\begin{aligned} S(I) &= \{y \in I \mid \exists\, x \in I \,:\, (x, y) \in S\} \\ &= \{y \in I \mid \exists\, x \in I \,:\, (x, y) \in G\} \\ &\subseteq \{y \in M \mid \exists\, x \in M \,:\, (x, y) \in G\} = G(M) \end{aligned}$$

und $0 \notin G(M)$. Also gilt auch $0 \notin S(I)$, so daß die Bedingung (2) erfüllt ist.

Sei nun $A \subseteq I$ eine Teilmenge von I mit $0 \in A$ und $S(A) \subseteq A$. Da A dann auch eine Teilmenge von M ist, und wir behaupten, daß

$$G(A) = S(A).$$

Wegen **Ext** reicht es, zu zeigen, daß $y \in G(A)$ genau dann, wenn $y \in S(A)$. Ist $y \in S(A)$, so gibt es ein $x \in A$ mit $(x, y) \in S$. Nach Definition von S heißt dies jedoch $(x, y) \in G$ und somit ist $y \in G(A)$. Ist umgekehrt $y \in G(A)$, so gibt es ein $x \in A \subseteq I$ mit $(x, y) \in G$. Nach Voraussetzung ist $S(A) \subseteq A$, so daß es zudem ein $y' \in A$ mit $(x, y') \in S$ gibt, was wiederum aufgrund der Definition von S $(x, y') \in G$ zur Folge. Da G aber eine Abbildung ist, folgt $y = y'$, so daß $(x, y) = (x, y') \in S$ und damit $y \in S(A)$. Dies zeigt die Behauptung $G(A) = S(A)$.

Also ist A eine Teilmenge von M mit den Eigenschaften $0 \in A$ und $G(A) \subseteq A$, d.h. $A \in X$. Aus der Definition von I als der Durchschnitt aller Mengen in X folgt dann, daß jedes Element von I in A enthalten ist. Mithin gilt $A = I$ wegen **Ext**.

Damit ist auch die Bedingung (3) erfüllt, und wir haben die Existenz einer minimal induktiven Menge gezeigt. $\square$

Die bisher eingeführten sieben Axiome sind das Herzstück des Axiomensystems. Wie wir gesehen haben, können wir mit ihrer Hilfe bereits einen großen Teil der uns geläufigen Begriffe der Mengenlehre definieren. In der Tat reichen sie aus, als Fundament für einen sehr großen Teil der Mathematik. Im Gegensatz zu dem nächsten Axiom sind die ersten sieben allgemein anerkannt, während es durchaus Richtungen innerhalb der Mathematik gibt, die es ablehnen, das *Auswahlaxiom* zu verwenden.

8) Auswahlaxiom (AC)
Ist $(\mathsf{M}_i)_{i\in I}$ *eine Familie von nicht-leeren Mengen, so gibt es eine Abbildung*

$$\mathsf{G} : I \longrightarrow \bigcup_{i\in I} \mathsf{M}_i$$

mit der Eigenschaft, daß $\mathsf{G}(i) \in \mathsf{M}_i$ *für alle* $i \in I$. *Wir nennen* G *dann eine* Auswahlfunktion.

Die Aussage des Axioms ist eigentlich sehr einfach und einleuchtend. Wenn wir eine gewisse Anzahl von nicht-leeren Mengen haben, so sollen wir in der Lage sein, aus jeder Menge ein Element auszuwählen. Weshalb lehnen dann manche Mathematiker das Axiom ab? Das liegt daran, daß man unter Verwendung der anderen Axiome zeigen kann, daß das Auswahlaxiom zu dem sogenannten *Wohlordnungssatz* äquivalent ist. Dieser sagt aus, daß man die Elemente jeder Menge so anordnen kann, daß jede nicht-leere Teilmenge ein kleinstes Element besitzt. Für die Menge der reellen Zahlen ist aber niemand in der Lage, eine solche Anordnung zu konstruieren. Das gibt dem Auswahlaxiom einen bitteren Beigeschmack. Es sei im Übrigen darauf hingewiesen, daß man für eine *endliche* Menge nicht-leerer Mengen eine Auswahlfunktion auch mit Hilfe der ersten sieben Axiome konstruieren kann.

Um das Axiomensystem von Zermelo und Fraenkel zu vervollständigen, fehlen noch zwei Axiome, die seltener benötigt werden.

9) Fundierungsaxiom (Fund)
Ist M *eine nicht-leere Menge von Mengen, so gibt es ein* $\mathsf{A} \in \mathsf{M}$ *mit* $\mathsf{A} \cap \mathsf{M} = \emptyset$.

Die Bedeutung dieses Axioms ist auf den ersten Blick etwas rätselhaft. Sie wird aber durch die folgende Folgerung klarer.

Folgerung 1.16 ($\mathsf{M} \notin \mathsf{M}$)
Keine Menge enthält sich selbst als Element.

Beweis: Ist M eine Menge, so gibt ist nach dem Paarmengenaxiom **Par** auch $\{\mathsf{M}\} = \{\mathsf{M}, \mathsf{M}\}$ eine Menge. Das einzige Element dieser Menge ist M, so daß mithin aus **Fund** folgt:

$$\mathsf{M} \cap \{\mathsf{M}\} = \emptyset.$$

Dies bedeutet aber gerade, daß $\mathsf{M} \notin \mathsf{M}$. $\square$

Das letzte Axiom wollen wir nur sehr vage formulieren, da eine exakte Formulierung für unsere Belange zu technisch würde. Es ist eine Verallgemeinerung des Aussonderungsaxioms und der Tatsache, daß das Bild einer Abbildung wieder eine Menge ist. Zugleich kann man es, wie das Aussonderungsaxiom, als eine Abschwächung des Komprehensionsprinzips verstehen.

Ersetzungsaxiom (Ers)
Ersetzt man die Elemente einer Menge auf vernünftige Art und Weise durch andere Elemente, so erhält man wieder eine Menge.

Die technischen Details verbergen sich hinter dem Ausdruck *auf vernünftige Weise*. Eine Möglichkeit, vernünftig zu ersetzen, wäre eine Abbildung zwischen zwei Mengen. Dann ist die Aussage von **Ers** gerade, daß das Bild einer Abbildung wieder eine Menge ist, wie wir weiter oben bereits aus **Aus** gefolgert haben. Denken wir uns das vernünftige Ersetzen als ein Prinzip, das auf viele verschiedene Mengen angewendet werden kann, so fordern wir in **Ers** nicht, daß die Gesamtheit der Elemente, aus denen man zum Ersetzen schöpft, wieder eine Menge bilden. Das Ersetzen ist also nicht notwendig eine Abbildung. Würde man auf die Einschränkung *auf vernünftige Art und Weise* verzichten, hätte man schlicht das Komprehensionsprinzip formuliert und wir würden die bekannte Antionomie erhalten. Es ist also für die Mengenlehre wichtig, den Begriff *auf vernünfige Art und Weise* sauber zu formulieren. Dies geschieht in einer Form, so daß **Ers** unmittelbar **Aus** impliziert. Da wir für unsere Belange mit **Aus** anstelle von **Ers** jedoch vollkommen auskommen, verweisen wir den Leser für die weiteren Details auf [Koe96].

Definition 1.17
Die in diesem Kapitel eingeführten zehn Axiome bilden das Axiomensystem **ZFC** von Zermelo und Fraenkel.

Wie stets bei Axiomensystemen will man Redundanz vermeiden, d.h. es sollen nicht mehr Axiome eingeführt werden, als unbedingt notwendig für die Grundlegung der Mathematik, wie wir sie kennen. Wir haben bereits erwähnt, daß man auf **Aus** verzichten könnte, wenn man **Ers** fordert, und natürlich ist **Ex** überflüssig, wenn man **Inf** verlangt. Daß man sie dennoch stets mit aufführt ist zum einen historisch bedingt, liegt zum anderen aber auch daran, daß man für viele Betrachtungen auf die allgemeineren Axiome verzichten kann.

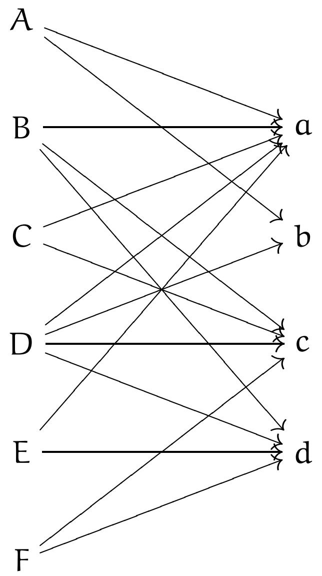
Wichtiger als die Unabhängigkeit der Axiome ist ihre *Widerspruchsfreiheit*, d.h. es sollten sich keine Antinomien wie die Russelsche aus den Axiomen herleiten lassen. Der Versuch, zu zeigen, daß das Axiomensystem **ZFC** widerspruchsfrei ist, hat sich leider als unmöglich erwiesen. Aus dem *Zweiten Gödelschen Unvollständigkeitssatz* folgt, daß die Widerspruchsfreiheit mit den Mitteln der Mathematik nicht beweisbar ist. Allerdings ist es bislang noch niemandem gelungen, einen Widerspruch herzuleiten. Mehr ist leider nicht leistbar.

B) **Relationen**

Oft wollen wir unterschiedliche Dinge oder Eigenschaften zueinander in Beziehung setzen und diese Beziehungen beschreiben. Ein typisches Beispiel hierfür sind die Überlegungen im Vorfeld einer größeren Anschaffung, etwa der eines Laptops. Unserer Vorstellung im Oktober 2008 zufolge soll das Gerät folgende Mindestanforderungen erfüllen:

a) mindestens 2GB Arbeitsspeicher;
b) mindestens zwei Prozessoren;
c) mindestens 250GB Festplatte;
d) mattes Display.

Wir durchforsten Prospekte von Herstellern und sammeln potentielle Kandidaten für unseren Laptop, nennen wir sie der Einfachheit halber A, B, C, D, E und F. Dann fragen wir uns, welcher Kandidat welche der Eigenschaften a, b, c und d erfüllt. Dies können wir graphisch wie folgt darstellen:



Dabei soll ein Pfeil ausdrücken, daß die Eigenschaft erfüllt ist. Mit den Begriffen unserer oben eingeführten Mengenlehre, können wir unser Problem aber auch folgendermaßen beschreiben. Wir fassen die Laptops zu einer Menge $M = \{A, B, C, D, E, F\}$ zusammen und die Eigenschaften zu einer Menge $N = \{a, b, c, d\}$. Dann ersetzen wir den Pfeil von A nach b durch das Tupel (A, b) und entsprechend für die anderen Pfeile. Die Gesamtheit dieser Tupel

$$\big\{(A,a),(A,b),(B,a),(B,c),(B,d),(C,a),(C,c),(D,a),\\ (D,b),(D,c),(D,d),(E,a),(E,d),(F,c),(F,d)\big\} \subseteq M \times N$$

ist eine Teilmenge von $M \times N$, und ein Tupel liegt genau dann in dieser Menge, wenn der Laptop in der ersten Komponente des Tupels die Eigenschaft in der zweiten Komponente erfüllt.

Wollen wir Beziehungen beschreiben, so können wir stets die Objekte, die wir potentiell zueinander in Beziehung setzen wollen, in zwei Mengen M und N einteilen, und die Teilmengen von $M \times N$ beschreiben dann exakt die möglichen Beziehungen zwischen den Elmenten in M und denen in N. Dies führt zu folgender Definition.

Definition 1.18
Sind M und N zwei Mengen, so heißt eine Teilmenge $R \subseteq M \times N$ auch eine *Relation*. Liegt (m, n) in R, so sagen wir, m und n stehen bezüglich R in Relation zueinander. Statt $(m, n) \in R$ schreiben wir dann auch manchmal mRn.

Eine ganze Klasse von Relationen mit besonderen Eigenschaften haben wir bereits kennen gelernt, Abbildungen. Eine Abbildung $G : M \longrightarrow N$ setzt die Elemente von M zu gewissen Elementen von N in Beziehung. Dabei gilt, daß jedes Element von M zu genau einem Element von N in Relation steht.

Wir wollen nun aber noch zwei weitere Klassen von Beispielen von Relationen betrachten, die für die Mathematik und ihre Anwendungen von sehr grundlegender Bedeutung sind. Dabei werden stets die Elemente einer Menge M zu sich selbst in Beziehung gesetzt, und bei beiden Arten von Relationen geht es darum, Ordnung zu schaffen.

B.1) *Äquivalenzrelationen.* Die Gesamtheit aller Schüler einer Schule werden von der Schulleitung zwecks sinnvoller Organisation des Unterrichts in Schulklassen eingeteilt. Dabei achtet die Schulleitung darauf, daß jeder Schüler zu einer Schulklasse gehört und auch nur zu dieser einen. Etwas mathematischer ausgedrückt, die Schulleitung teilt die *Menge* S der Schüler in *paarweise disjunkte Teilmengen* K_i, $i = 1, \ldots, k$, ein, so daß wir anschließend eine *disjunkte Zerlegung* (siehe Definition 1.23)

$$S = \dot{\bigcup_{i=1}^{k}} K_i$$

der Menge S in die Schulklassen $K_1, \ldots, K_k$ haben. Dabei kann man für die Zugehörigkeit der Schüler Alfred, Ben und Christoph zu einer Schulklasse folgendes feststellen:

1) Alfred gehört zu einer Schulklasse.
2) Wenn Alfred in der gleichen Schulklasse ist wie Ben, dann ist Ben auch in der gleichen Schulklasse wie Alfred.
3) Wenn Alfred in der gleichen Schulklasse ist wie Ben und wenn zugleich Ben in der gleichen Schulklasse ist wie Christoph, dann ist auch Alfred in der gleichen Schulklasse wie Christoph.

Diese Aussagen sind so offensichtlich, daß man kaum glauben mag, daß es einen tieferen Sinn hat, sie zu erwähnen. Aber nehmen wir für einen Augenblick an, die Schulleitung hat ihre Einteilung der Schüler vorgenommen und für jede Schulklasse eine Liste mit den Namen der Schüler erstellt, die zu dieser Schulklasse gehören wollen. Nehmen wir ferner an, die Schulleitung hat noch nicht überprüft, ob jeder Schüler in genau einer Schulklasse eingeteilt ist. Dann behaupte ich, wenn man in den drei Aussagen 1)-3) die Schüler Alfred, Ben und Christoph durch beliebige Schüler ersetzt und die Aussagen richtig sind für jede Kombination der Schülernamen, dann ist sichergestellt, daß auch jeder Schüler in genau einer Schulklasse eingeteilt ist.

Als Mathematiker suchen wir nach möglichst einfachen Regeln, denen die Einteilung der Schulklassen genügen muß, um sicherzustellen, daß sie wirklich eine disjunkte Zerlegung von S ist, d.h. daß wirklich jeder Schüler in genau einer Schulklasse ist, und die Regeln 1)-3) sind genau die Regeln, die wir dazu brauchen. Wenn wir nun die Zugehörigkeit zweier Schüler x und y zur gleichen Klasse verstehen als "x *steht in Relation zu* y", dann definieren uns die drei Regeln 1)-3) zudem eine Teilmenge von $S \times S$, nämlich die Teilmenge

$$R = \{(x, y) \in S \times S \mid x \text{ ist in der gleichen Schulklasse wie } y\}.$$

Die Regeln 1)-3) lassen sich für Schüler $x, y, z \in S$ dann wie folgt formulieren:

- $(x, x) \in R$.
- Wenn $(x, y) \in R$, dann ist auch $(y, x) \in R$.
- Wenn $(x, y) \in R$ und $(y, z) \in R$, dann ist auch $(x, z) \in R$.

Eine solche Relation nennt man eine *Äquivalenzrelation*, man nennt Schüler der gleichen Schulklasse *äquivalent* und die Schulklassen nennt man dann auch *Äquivalenzklassen.*

Natürlich führen wir den Begriff der *Äquivalenzrelation* nun für beliebige Mengen ein.

Definition 1.19
Es sei M eine Menge. Eine *Äquivalenzrelation* auf M ist eine Teilmenge $R \subseteq M \times M$, so daß für alle $x, y, z \in M$ gilt:

ÄR1: $(x, x) \in R,$ ("Reflexivität")
ÄR2: $(x, y) \in R \;\Rightarrow\; (y, x) \in R,$ ("Symmetrie")
ÄR3: $(x, y), (y, z) \in R \;\Rightarrow\; (x, z) \in R.$ ("Transitivität")

Bei Äquivalenzrelationen hat sich (ähnlich wie bei Abbildungen) eine alternative Schreibweise zu $(x, y) \in R$ durchgesetzt, die auch wir im folgenden verwenden wollen.

Notation 1.20
Sei M eine Menge und R eine Äquivalenzrelation auf M. Wir definieren für $x, y \in M$

$$x \sim y \quad :\Longleftrightarrow \quad (x, y) \in R,$$

und wir sprechen dann meist von der Äquivalenzrelation "$\sim$" statt R, sofern keine Mißverständnisse zu befürchten sind.

Mit dieser Schreibweise lassen sich die drei Axiome in Definition 1.19 wie folgt formulieren. Für $x, y, z \in M$ soll gelten:

ÄR1: $x \sim x$, ("Reflexivität")
ÄR2: $x \sim y \;\Rightarrow\; y \sim x$, ("Symmetrie")
ÄR3: $x \sim y, y \sim z \;\Rightarrow\; x \sim z$. ("Transitivität")

Definition 1.21
Es sei M eine Menge und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M. Für $x \in M$ heißt die Menge

$$\overline{x} := \{y \in M \mid y \sim x\}$$

die *Äquivalenzklasse* von x. Jedes $y \in \overline{x}$ heißt ein *Repräsentant* der Klasse $\overline{x}$. Mit

$$M/\sim := \left\{\overline{x} \mid x \in M\right\}$$

bezeichnen wir die Menge der *Äquivalenzklassen modulo der Äquivalenzrelation* $\sim$.

Beispiel 1.22
Wir betrachten die Menge $M = \mathbb{R}^2$ der Punkte in der reellen Zahlenebene und wir bezeichnen mit $|P|$ den Abstand von P zum Ursprung $(0,0)$. Für zwei Punkte $P, Q \in M$ definieren wir

$$P \sim Q \quad \Longleftrightarrow \quad |P| = |Q|,$$

d.h. wir nennen die Punkte *äquivalent*, falls ihr Abstand zum Ursprung gleich ist. Dann ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation.

ÄR1: Sei $P \in M$, dann ist $|P| = |P|$, also $P \sim P$.
ÄR2: Falls $P, Q \in M$ mit $P \sim Q$, dann ist $|P| = |Q|$ und somit auch $|Q| = |P|$. Damit gilt aber $Q \sim P$.
ÄR3: Falls $P, Q, R \in M$ mit $P \sim Q$ und $Q \sim R$, dann gilt $|P| = |Q|$ und $|Q| = |R|$. Aber damit gilt auch $|P| = |R|$ und somit $P \sim R$.

Die Äquivalenzklasse

$$\overline{P} = \{Q \in M \mid |Q| = |P|\}$$

von $P \in M$ ist der Kreis um den Ursprung vom Radius $|P|$.

Wir haben anfangs behauptet, daß die drei Axiome einer Äquivalenzrelation sicherstellen, daß die zugehörigen Äquivalenzklassen eine disjunkte Zerlegung von M induzieren. Dies wollen wir nun beweisen. Dazu sollten wir zunächst den Begriff disjunkt klären.

Definition 1.23

a. Zwei Mengen M und N heißen *disjunkt*, falls $M \cap N = \emptyset$.

b. Eine Familie $(M_i)_{i \in I}$ von Mengen heißt *paarweise disjunkt*, wenn M_i und M_j für alle $i, j \in I$ mit $i \neq j$ disjunkt sind.

c. Es sei M eine Menge. Eine paarweise disjunkte Familie $(M_i)_{i \in I}$ von Teilmengen von M heißt eine *disjunkte Zerlegung* von M, falls $M = \bigcup_{i \in I} M_i$. Wir schreiben in diesem Fall:

$$M = \dot{\bigcup_{i \in I}} M_i.$$

Proposition 1.24
Es sei M eine Menge. Ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M, dann bilden die Äquivalenzklassen eine disjunkte Zerlegung von M, d. h. jedes $x \in M$ liegt in genau einer Äquivalenzklasse.

Insbesondere gilt für zwei Äquivalenzklassen $\overline{x}$ und $\overline{y}$ entweder $\overline{x} = \overline{y}$ oder $\overline{x} \cap \overline{y} = \emptyset$.

Beweis: Sei $x \in M$ beliebig. Aus $x \sim x$ folgt $x \in \overline{x} \subseteq \bigcup_{\overline{y} \in M/\sim} \overline{y}$. Mithin gilt

$$M = \bigcup_{\overline{y} \in M/\sim} \overline{y}.$$

Es bleibt also zu zeigen, daß die Äquivalenzklassen paarweise disjunkt sind.

Seien $\overline{x}, \overline{y} \in M/\sim$ mit $\overline{x} \cap \overline{y} \neq \emptyset$. Dann gibt es ein $z \in \overline{x} \cap \overline{y}$, und es gilt $z \sim x$ und $z \sim y$. Wegen der Symmetrie gilt aber auch $x \sim z$ und mittels der Transitivität dann $x \sim y$. Sei nun $u \in \overline{x}$ beliebig, dann gilt $u \sim x$ und wieder wegen der Transitivität $u \sim y$. Also $u \in \overline{y}$ und damit $\overline{x} \subseteq \overline{y}$. Vertauschung der Rollen von x und y in der Argumentation liefert schließlich $\overline{x} = \overline{y}$. □

B.2) *Ordnungsrelationen.* Wir haben im letzten Abschnitt ein Ordnungsprinzip kennen gelernt, bei dem wir mehrere Elemente einer Menge nach vorgegebenen Kriterien zu einer Einheit zusammenfassen, so daß am Ende jedes Element in genau dieser Einheiten enthalten ist. Ein anderes Prinzip des Ordnens ist das Festlegen einer Reihen- oder Rangfolge, wie sie etwa bei sportlichen Wettkämpfen alltäglich ist oder beim Schlangestehen an Fleischtheke. Wenn die Reihenfolge einmal festgelegt ist, so kann man je zwei Wartende im Hinblick darauf miteinander vergleichen, wer weiter vorne in der Schlange steht. Wenn wir die Wartenden als Elemente einer Menge M auffassen, so liefert uns die gegebene Reihenfolge eine Relation auf M:

x steht in Relation zu y, wenn x mindestens so weit vorne steht wie y.

In unserer Mengenschreibweise bedeutet dies:

$$R = \{(x, y) \in M \times M \mid x \text{ steht mindestens so weit vorne wie } y\}.$$

Dabei ist folgendes Prinzip offensichtlich:

3) Steht x mindestens so weit vorne wie y und y mindestens so weit vorne wie z, so steht x auch mindestens so weit vorne wie z.

Wenn die Reihenfolge zudem eindeutig sein soll, so sollte auch folgendes Prinzip gelten:

2) Steht x mindestens so weit vorne wie y und steht zudem y mindestens so weit vorne wie x, so sind x und y identisch.

Und es ist eine Tautologie, daß

1) x mindestens so weit vorne steht wie x.

Schließlich sollte man noch fordern, daß je zwei Wartende miteinander verglichen werden können, d.h.

4) für je zwei Wartende x und y gilt, entweder steht x mindestens soweit vorne wie y oder umgekehrt.

In der Tat kann man in vielen Anwendungen in der Mathematik auf die letzte Eigenschaft verzichten. Wir führen den Begriff der *Ordnungsrelation* deshalb in zwei Abstufungen ein.

Definition 1.25
Es sei M ein Menge. Eine *Ordnungsrelation* auf M, auch *Halbordnung* oder *partielle Ordnung* genannt, ist eine Relation $R \subseteq M \times M$, so daß für alle $x, y, z \in M$ gilt:

OR1: $(x, x) \in R$, (“Reflexivität”)
OR2: $(x, y), (y, x) \in R \Rightarrow x = y$, (“Antisymmetrie”)
OR3: $(x, y), (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$. (“Transitivität”)

Gilt zudem

OR4: $(x, y) \in R$ oder $(y, x) \in R$ für alle $x, y \in M$,

so nennen wir R eine *Totalordnung* oder *lineare Ordnung* auf M.

Beispiel 1.26
Ein typisches Beispiel für eine partielle Ordnung auf einer Menge, die keine Totalordnung ist, ist die Ordnung einer Potenzmenge durch die Inklsion. Sei N eine Menge und $M = \mathrm{Pot}(N)$ die Potenzmenge von N. Wir definieren eine Relation auf M durch

$$R = \{(A, B) \in M \times M \mid A \subseteq B\}.$$

Die Eigenschaften **OR1**, **OR2** und **OR3** sind offensichtlich. Enthält N mindestens zwei Elemente $x \neq y$, so ist zudem **OR4** nicht erfüllt, daß weder $\{x\} \subseteq \{y\}$ noch $\{y\} \subseteq \{x\}$.

Literatur

[Ebb92] Heinz-Dieter Ebbinghaus (ed.), *Zahlen*, 3 ed., Springer, 1992.

[Jen00] Ronald Jensen, *Grundlagen der axiomatischen mengenlehre*, Vorlesungsskript, `http://www.mathematik.hu-berlin.de/~wwwlogik/org/skripte/vl_jensen_ws99.ps`, 2000.

[Koe96] Peter Koepke, *Mengenlehre*, Vorlesungsskript Bonn, `http://www.math.uni-bonn.de/people/logic/teachi`
1996.