Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Sommersemester 2010, Blatt 5

Stefan Steidel

Grundlagen der Mathematik 1

Aufgabe 17: Bestimme für die folgenden komplexen Zahlen $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $\arg z$, $|z|$, $\overline{z}$ und z^{-1}:

(a) $z = i - 1$ (b) $z = \frac{4i}{1+i}$ (c) $z = \frac{(2+2i)^7}{(1-i)^3}$

Lösung.

(a) Sei $z = i - 1 = -1 + i$. Dann gilt $\operatorname{Re} z = -1$, $\operatorname{Im} z = 1$ und $\overline{z} = -1 - i = -(1+i)$. Für den Betrag von z rechnen wir

$$|z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

und damit erhalten wir das Inverse von z als

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{-1-i}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i.$$

Zur Ermittlung von $\alpha = \arg(z)$ betrachten wir die Zahl $\frac{z}{|z|} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ vom Betrag 1, für die gilt

$$\frac{z}{|z|} = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha),$$

d.h. $\cos(\alpha) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ und $\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, also $\alpha = \frac{3}{4}\pi$. $\square$

(b) Sei $z = \frac{4i}{1+i}$. Wir formen z zunächst in eine Darstellung der Form $a + bi$ um:

$$z = \frac{4i}{1+i} = \frac{4i \cdot (1-i)}{(1+i)\cdot(1-i)} = \frac{4i - 4i^2}{1 - i^2} = \frac{4i+4}{2} = 2 + 2i.$$

Dann gilt $\operatorname{Re} z = 2$, $\operatorname{Im} z = 2$ und $\overline{z} = 2 - 2i$. Für den Betrag von z rechnen wir

$$|z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

und damit erhalten wir das Inverse von z als

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{2-2i}{8} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}i.$$

Zur Ermittlung von $\alpha = \arg(z)$ betrachten wir die Zahl $\frac{z}{|z|} = \frac{2+2i}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i.$ vom Betrag 1, für die gilt

$$\frac{z}{|z|} = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha),$$

d.h. $\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ und $\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, also $\alpha = \frac{\pi}{4}$. $\square$

(c) Sei $z = \frac{(2+2i)^7}{(1-i)^3}$. Wir formen z zunächst in eine Darstellung der Form $a + bi$ um:

$$\begin{aligned} z = \frac{(2+2i)^7}{(1-i)^3} &= \frac{2^7 \cdot (1+i)^7 \cdot (1+i)^3}{(1-i)^3 \cdot (1+i)^3} = \frac{2^7 \cdot (1+i)^{10}}{2^3} \\ &= 2^4 \cdot (1 + 2i + i^2)^5 = 2^4 \cdot (2i)^5 = 2^9 \cdot i = 512i. \end{aligned}$$

Damit gilt offensichtlich $\operatorname{Re} z = 0$, $\operatorname{Im} z = 512$, $\overline{z} = -512i$, $|z| = 512$, $z^{-1} = -\frac{1}{512}i$ und $\arg(z) = \frac{\pi}{2}$. $\square$