Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Sommersemester 2010, Blatt 3

Stefan Steidel

Grundlagen der Mathematik 1

Abgabetermin: Montag, 26/04/2010, 10:00

Aufgabe 9: Untersuche die folgenden Abbildungen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität:

(a) $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : \ x \longmapsto 3x + 2$

(b) $f_2 : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} : \ x \longmapsto 3x + 2$

(c) $f_3 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \ (x, y) \longmapsto (xy, x + 1)$

(d) $f_4 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \ (x, y) \longmapsto (x - 2y, 2x + y)$

Aufgabe 10:

(a) Seien M, N zwei nicht-leere Mengen und $f : M \longrightarrow N$ eine Abbildung. Formuliere die folgende Aussage zunächst in Quantorenschreibweise und beweise sie anschließend:
f ist genau dann surjektiv, wenn für alle nicht-leeren Mengen X und für alle Abbildungen $g : N \longrightarrow X$ und $h : N \longrightarrow X$ mit $g \circ f = h \circ f$ folgt, dass $g = h$ ist.

(b) Seien L, M, N Mengen und $f : L \longrightarrow M$, $g : M \longrightarrow N$ Abbildungen. Beweise oder widerlege - durch Gegenbeispiel - die folgenden Aussagen:

(1) Ist $g \circ f$ injektiv, so ist g injektiv.

(2) Ist $g \circ f$ injektiv, so ist f injektiv.

Aufgabe 11: Seien M, N Mengen, $A_1, A_2 \subseteq M$ und $B, B_1, B_2 \subseteq N$ Teilmengen und $f : M \longrightarrow N$ eine Abbildung. Beweise die folgenden Aussagen:

(a) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

(b) $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$.

(c) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.

(d) $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$.

Gib außerdem konkrete Beispiele dafür an, dass in (b) und (d) keine Gleichheit gilt.

Aufgabe 12: Beweise mittels vollständiger Induktion:

(a) $2^n > n^2$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq 5$.

(b) $\sum\limits_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$ für $q \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$.