Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Stefan Steidel

Grundlagen der Mathematik 1

Abgabetermin: Montag, 03/05/2010, 10:00

Aufgabe 13:

(a) Seien M, N Mengen. Beweise die folgenden Aussagen:

(1) Ist $f : M \longrightarrow N$ eine surjektive Abbildung, dann gilt $|N| \leq |M|$.

(2) Falls $0 < |N| \leq |M| < \infty$, dann gibt es eine surjektive Abbildung $f : M \longrightarrow N$.

(b) Beweise, dass die Menge $\mathbb{Z}$ abzählbar unendlich ist.

Aufgabe 14:

(a) Beweise, dass die Menge $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \big\{(0, 0)\big\}$ zusammen mit der Verknüpfung $(a, b) \cdot (a', b') = (aa' - bb', ab' + ba')$ für $a, a', b, b' \in \mathbb{R}$ eine Gruppe definiert.

(b) Beweise, dass $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +, \cdot)$ mit den Verknüpfungen

$$+ : \ (a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$$

für $(a, b), (a', b') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und

$$\cdot : \ (a, b) \cdot (a', b') = (aa' - bb', ab' + ba')$$

für $(a, b), (a', b') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \big\{(0, 0)\big\}$ ein Körper ist.

HINWEIS: Hörer der Vorlesung „Algebraische Strukturen“ bei Andreas Gathmann dürfen in Aufgabenteil (b) bekannte Resultate aus dieser Veranstaltung verwenden. Für die anderen ist diese Aufgabe eine gute Übung für das Verständnis der Begriffe „Gruppe“ und „Körper“.

Aufgabe 15:

(a) Zeige, dass durch

$$R := \big\{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \;\big|\; x \text{ teilt } y\big\}$$

eine Ordnungsrelation auf $\mathbb{N}$ definiert wird. Ist R eine Totalordnung?

(b) Sei K ein angeordneter Körper und $A, B \subseteq K$ Teilmengen, so dass $\sup(A)$ und $\sup(B)$ existieren. Wir setzen $A + B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$. Beweise, dass auch $\sup(A + B)$ existiert und $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$ gilt.

Aufgabe 16:

(a) Sei K ein Körper und $x \in K$. Zeige, dass $x^2 = 1$ genau dann, wenn $x \in \{-1, 1\}$.

(b) Sei K ein angeordneter Körper und $x, y \in K$. Beweise die folgenden Aussagen:

(1) Ist $0 < x$ und $n \in \mathbb{N}$, so ist $0 < x^n$.

(2) Ist $0 \leq x, y$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$, so gilt $(x < y \iff x^n < y^n)$.