Grundlagen der Mathematik 1

Abgabetermin: Montag, 10/05/2010, 10:00

Aufgabe 17: Bestimme für die folgenden komplexen Zahlen $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $\arg z$, $|z|$, $\bar{z}$ und z^{-1}:

$$z = i - 1, \quad z = \frac{4i}{1+i}, \quad z = \frac{(2+2i)^7}{(1-i)^3}.$$

HINWEIS: Diese Aufgabe dient der privaten Übung und wird nicht von den Übungsleitern korrigiert, wir werden eine Lösung auf die Homepage zur Vorlesung stellen. Sollten trotzdem Schwierigkeiten auftreten, so sprecht diese in der Übung oder dem Tutorium an.

Aufgabe 18: Bestimme Supremum, Infimum, Maximum und Minimum (sofern sie existieren) der folgenden Mengen:

$$A = \left\{ \frac{m+n}{m \cdot n} \;\middle|\; m, n \in \mathbb{N}_{>0} \right\} \subseteq \mathbb{R} \quad \text{und} \quad B = \left\{ n + \frac{(-1)^n}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}_{>0} \right\} \subseteq \mathbb{R}.$$

Aufgabe 19:

(a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen und $a \in \mathbb{C}$. Beweise die folgende Äquivalenz:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\lim_{n\to\infty} \operatorname{Re}(a_n) = \operatorname{Re}(a) \;\text{ und }\; \lim_{n\to\infty} \operatorname{Im}(a_n) = \operatorname{Im}(a) \right)$$

(b) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}$ und $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ bijektiv, so nennen wir die Folge

$$\left(a_{\sigma(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(a_{\sigma(0)}, a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, a_{\sigma(3)}, \ldots\right)$$

eine *Umordnung* von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Beweise die folgenden beiden Aussagen:

(1) Wenn $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, so konvergiert jede Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a.

(2) Wenn $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, so konvergiert jede Umordnung von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a.

Aufgabe 20:

(a) Untersuche die folgenden Folgen auf Konvergenz und berechne gegebenenfalls den Grenzwert:

(1) $a_n = \frac{n^4 - 3n + 5}{3n^5 + 6n^3 + 11}$.

(2) $a_n = \frac{(3n+1)\cdot(n+1)^2 - 5(n-1)}{1+n+n^2}$.

(3) $a_n = \frac{n}{2^n}$.

(b) Zeige die folgenden Aussagen:

(1) Die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $s_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ ist konvergent.

(2) Die Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $t_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ist konvergent.

(3) Die Grenzwerte von $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stimmen überein. Wir nennen den Grenzwert die *Eulersche Zahl* e.

HINWEIS: Zeige, dass der Grenzwert von $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach unten durch s_m für jedes $m \in \mathbb{N}$ beschränkt ist.