Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig Sommersemester 2010, Blatt 6
Stefan Steidel

Grundlagen der Mathematik 1

Abgabetermin: Montag, 17/05/2010, 10:00

Aufgabe 21: Zeige, dass die folgenden Folgen konvergieren und bestimme deren Grenzwerte.

(a) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv definiert durch $x_0 := 1$ und $x_{n+1} := \sqrt{1+x_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv definiert durch $y_0 := 1$ und $y_{n+1} := 1 + \frac{1}{y_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

HINWEIS: Prüfe die Folgen (bzw. geeignete Teilfolgen) auf Monotonie und Beschränktheit. Für die Berechnung der Grenzwerte können dann die Grenzwertsätze geeignet angewandt werden.

Aufgabe 22:

(a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen, so dass $|a_{n+1} - a_n| < \frac{1}{2^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass es sich um eine konvergente Folge handelt.

(b) Bleibt die Behauptung aus Aufgabenteil (a) korrekt, wenn wir die Bedingung $|a_{n+1} - a_n| < \frac{1}{n}$ voraussetzen? Gib einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

Aufgabe 23:

(a) Untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz. Die Berechnung der Grenzwerte im Falle der Konvergenz ist nicht erforderlich.

$$(1)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-n^4}{100n^4} \qquad (2)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{n+1}} \qquad (3)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^n}{(-3)^{n+1}}$$

(b) Berechne das Cauchy-Produkt $\left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n\right)^2$.

(c) Berechne den Wert der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} nq^n$ für $|q| < 1$.

Aufgabe 24: Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen mit $a_n, b_n \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. Beweise die folgenden Aussagen.

(a) Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot 10^{-n}$$

ist konvergent und stellt somit eine reelle Zahl dar. Man schreibt diese Zahl dann in Dezimaldarstellung durch Hintereinanderschreiben der Ziffern als $0, a_1a_2a_3\ldots$.

(b) Jede reelle Zahl im Intervall $[0, 1)$ besitzt eine Dezimaldarstellung wie in Aufgabenteil (a).

(c) Ist $N \geq 2$ eine feste natürliche Zahl mit $a_j = b_j$ für $1 \leq j \leq N-1$, $a_N < b_N$ und $0, a_1a_2a_3\ldots = 0, b_1b_2b_3\ldots$, so gilt $a_N + 1 = b_N$ und $a_j = 9$, $b_j = 0$ für alle $j > N$.