Thomas Markwig — Stefan Steidel

Grundlagen der Mathematik 1

Abgabetermin: Montag, 31/05/2010, 10:00

Aufgabe 25:

(a) Bestimme die Konvergenzradien folgender Potenzreihen.

$$(1)\quad \sum_{n=0}^{\infty} n^k \cdot t^n \ \text{ für } \ k \in \mathbb{N} \qquad\qquad (2)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)^n} \cdot t^n$$

(b) Beweise für $x, y \in \mathbb{K}$ die Gleichung $\sin(x+y) = \sin(x)\cdot\cos(y) + \cos(x)\cdot\sin(y)$.

Aufgabe 26:

(a) Zeige, konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot y^n$ für ein $y \in \mathbb{K}$, so konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1}$ absolut für alle $x \in \mathbb{K}$ mit $|x| < |y|$.

(b) Zeige, die Potenzreihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot t^n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot t^{n-1}$ in $\mathbb{K}$ haben denselben Konvergenzradius.

(c) Gilt für $x \in \mathbb{K}$ stets: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ konvergent $\Longleftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1}$ konvergent?

HINWEIS ZU (a): Schaut euch den Beweis von Lemma 11.28 an und verwendet Aufgabe 23 auf Blatt 06.

Aufgabe 27:

(a) Bestimme für die nachfolgenden Mengen jeweils die Menge aller ihrer Häufungspunkte:

$$(1)\quad M_1 = \left\{ (-1)^n + \left(\frac{-1}{n}\right)^{n+1} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}_{\geq 1} \right\} \qquad\qquad (2)\quad M_2 = \mathbb{N}$$

(b) Bestimme die folgenden Grenzwerte:

(1) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-2x^2-x+2}{x^2-x-2}$.

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{x^n-x_0^n}{x-x_0}$, wobei $n \in \mathbb{N}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig, aber fest vorgegeben sind.

(3) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+5} - \sqrt{x}\right)$.

Aufgabe 28:

(a) Verwende die ϵ-δ-Definition der Stetigkeit, um zu zeigen, dass die Funktion $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \sqrt{1-x^3}$ stetig in $[0,1]$ ist.

(b) Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $L \in \mathbb{R}_{>0}$. Zeige, wenn $|f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x-y|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt, so ist f stetig in $\mathbb{R}$.