Fachbereich Mathematik — Sommersemester 2010, Blatt 8
Thomas Markwig — Stefan Steidel

Grundlagen der Mathematik 1

Abgabetermin: Montag, 07/06/2010, 10:00

Aufgabe 29:

(a) Sei $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} \frac{2^n}{n!} & \text{für } x = \frac{1}{n} \text{ mit } n \geq 1 \\ 0 & \text{für } x \in [0,1] \backslash \{\frac{1}{n} \mid n \geq 1\} \end{cases} .$$

Bestimme (mit Beweis) sämtliche Punkte auf $[0,1]$, in denen f stetig ist.

(b) Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $f(a) \neq b$. Zeige, es gibt ein $\delta > 0$, so dass $f(x) \neq b$ für alle $x \in (a - \delta, a + \delta)$.

(c) Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und $f(1) = a > 0$. Zeige, dann ist $f = \exp_a$.

HINWEIS: Die Definition von $\exp_a$ wird erst in der kommenden Vorlesung eingeführt. Wer sich schon vorher an der Aufgabe versuchen möchte, kann die Definition auch einfach im Skript nachlesen.

Aufgabe 30:

(a) Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung mit $\mathrm{Im}(f) \subseteq [a, b]$. Zeige, dass f einen Fixpunkt hat, d.h. es gibt ein $c \in [a, b]$ mit $f(c) = c$.

(b) Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung und $a \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $f(x) = f(x + a)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeige, dass es ein $b \in (0, a)$ gibt mit $f(b + \frac{a}{2}) = f(b)$.

Aufgabe 31: Für $n \geq 2$ sei $f_n = \sqrt[n]{\cdot} : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$. Beweise oder widerlege die folgenden Aussagen.

(a) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig auf $[0, \infty)$.

(b) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig auf $[1, 100]$.

Aufgabe 32: Zeige, dass die Wurzelfunktion $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \sqrt{x}$ gleichmäßig stetig ist.