Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Sommersemester 2010, Blatt 9

Stefan Steidel

Grundlagen der Mathematik 1

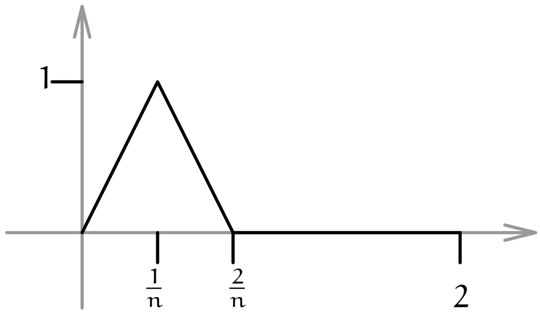
Abgabetermin: Montag, 14/06/2010, 10:00

Aufgabe 33:

(a) Finde eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von stetigen Funktionen $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, die punktweise gegen die Nullfunktion konvergiert, aber unbeschränkt ist, d.h., so dass zu jedem $c \in \mathbb{R}$ ein $n \in \mathbb{N}$ und ein $x \in [0,1]$ existiert mit $|f_n(x)| > c$.

(b) Zeige, dass die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_{\geq 1}}$ von Funktionen $f_n : [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f_n(x) = \begin{cases} nx, & x \in [0, \frac{1}{n}) \\ 2 - nx, & x \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}) \\ 0, & x \in [\frac{2}{n}, 2] \end{cases},$$



punktweise, aber nicht gleichmäßig gegen die Nullfunktion konvergiert.

Aufgabe 34: Für welche $x, y \in \mathbb{R}$ gilt die Gleichung $\frac{\cos(x+y)\cdot\cos(x-y)}{\cos^2(y)-\sin^2(y)} = 1$?

Aufgabe 35:

(a) Sei $f : (a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeige, dass f genau dann stetig in a fortsetzbar ist, wenn f gleichmäßig stetig ist.

(b) Gibt es eine beschränkte Funktion $f : (0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, die sich nicht stetig in 0 fortsetzen lässt?

(c) Sei $f : (0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit beschränkter Ableitung. Zeige, dass f dann stetig in 0 fortsetzbar ist.

Aufgabe 36:

(a) Berechne die Ableitungen der folgenden Funktionen $f : (a,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$.

(1) $f(x) = \ln\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)$, $a = 1$ (2) $f(x) = \frac{x^2+4}{x-4}$, $a = 4$ (3) $f(x) = \sqrt{e^{\cos(\sqrt{x})}}$, $a = 0$

(b) Für $n \in \{0,1,2\}$ sei

$$f_n : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \begin{cases} x^n \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{für } x > 0, \\ 0, & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Welche der Funktionen sind stetig in $a = 0$, differenzierbar in $a = 0$, stetig differenzierbar auf $[0,\infty)$?

(c) Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ auf $[a,b]$ stetig und auf (a,b) differenzierbar mit $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a,b)$. Zeige, dass f konstant ist.