Fachbereich Mathematik | Sommersemester 2010, Blatt 10
Thomas Markwig | Stefan Steidel

Grundlagen der Mathematik 1

Abgabetermin: Montag, 21/06/2010, 10:00

Aufgabe 37:

(a) Berechne die folgenden Grenzwerte.

(1) $\lim\limits_{x\to\pi} \frac{\cos(x)+1}{x^2-\pi^2}$, $x<\pi$ (2) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln(x)}\right)$, $x>1$ (3) $\lim\limits_{x\to 0} x^x$, $x>0$

(b) Bestimme alle Extrema der Funktion $f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R},\ x\longmapsto(1-x)\cdot\sqrt{1+9x^2}$.

Aufgabe 38:

(a) Sei

$$f:\mathbb{R}\longmapsto\mathbb{R},\ x\longmapsto\begin{cases}\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & \text{für } x\neq 0,\\ 0 & \text{für } x=0.\end{cases}$$

Zeige die folgenden Aussagen:

(1) Für $x\neq 0$ und für alle $n\in\mathbb{N}_{\geq 1}$ gibt es Polynome $p_n(x)$ und $q_n(x)=x^{3\cdot 2^{n-1}}$, so dass gilt $f^{(n)}(x)=\frac{p_n(x)}{q_n(x)}\cdot\exp(-\frac{1}{x^2})$.

(2) Für alle $k\in\mathbb{N}$ gilt $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\exp(-\frac{1}{x^2})}{x^k}=0$.

(3) Für alle $n\in\mathbb{N}$ gilt $f^{(n)}(0)=0$.

(4) $f\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ und $T_{f,0}=0$.

(b) Berechne für die Funktion $f:\mathbb{R}\longrightarrow(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}),\ x\longmapsto\arctan(x)$ das zweite Taylor-Polynom $T^2_{f,0}$ um 0 und gib eine Abschätzung für das Restglied $|f(x)-T^2_{f,0}(x)|$ auf dem Intervall $[-1,1]$ an.

(c) Berechne für die Funktion $f:\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\longrightarrow\mathbb{R},\ x\longmapsto\frac{\cos(x)}{1-(2x)^4}$ das vierte Taylor-Polynom $T^4_{f,0}$ um 0.

HINWEIS: Ihr solltet hier mit etwas Überlegung die Berechnung aller vier Ableitungen von f vermeiden.

Aufgabe 39: Sei $n\in\mathbb{N}$, $U\subseteq\mathbb{R}$ und $f,g\in\mathcal{C}^n(U,\mathbb{R})$ zwei n-fach differenzierbare Funktionen mit gleichem Definitionsbereich. Zeige, dass gilt:

$$(f\cdot g)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot f^{(k)}\cdot g^{(n-k)}.$$

Aufgabe 40: Beweise oder widerlege durch eine Gegenbeispiel die folgenden Aussagen:

(a) Sei $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ eine stetige und auf (a,b) differenzierbare Funktion, so dass $\lim\limits_{x\to a}f'(x)$ existiert. Dann ist f differenzierbar in a.

(b) Sei $f\in\mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$ eine stetig differenzierbare streng monoton wachsende Funktion. Dann gilt $f'(x)>0$ für alle $x\in[a,b]$.