Fachbereich Mathematik — Sommersemester 2010, Blatt 11
Thomas Markwig — Stefan Steidel

Grundlagen der Mathematik 1

Abgabetermin: Montag, 28/06/2010, 10:00

Aufgabe 41: Bestimme die folgenden Integrale.

(a) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{3}{\cos^2(x)} dx$.

(b) $\int_{-1}^{2} \left(8 \cdot (x-2)^3 + \frac{1}{\sqrt{x+2}}\right) dx$.

(c) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x)\cos(x) dx$.

(d) $\int_0^{\frac{1}{4}} x^2 e^{4x} dx$.

Aufgabe 42: Wir nennen eine Funktion $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *stückweise stetig*, wenn es eine Zerlegung $Z = (x_0, \ldots, x_n)$ von $[a,b]$ gibt, so dass die Funktionen $f_i : [x_{i-1}, x_i] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x)$ für $i = 1, \ldots, n$ auf (x_{i-1}, x_i) stetig sind und die Grenzwerte $\lim\limits_{x \to x_{i-1}} f_i(x)$ und $\lim\limits_{x \to x_i} f_i(x)$ in $\mathbb{R}$ existieren.
Zeige, dass eine stückweise stetige Funktion $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ auf $[a,b]$ integrierbar ist.

Aufgabe 43:

(a) Sei $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto e^x$, $n \in \mathbb{N}$, $Z_n = (0, \frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}, \ldots, \frac{2^n-1}{2^n}, 1)$ eine Zerlegung und $\alpha^n = (\frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}, \ldots, \frac{2^n-1}{2^n}, 1)$ Zwischenpunkte. Zeige die folgenden Aussagen.

  (1) $ZS(f, Z_n, \alpha^n) = (e-1) \cdot e^y \cdot \frac{1}{\frac{e^y-1}{y}}$ für $y = \frac{1}{2^n}$.

  (2) $\lim\limits_{y \to 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1$.

  (3) Berechne $\int_0^1 e^x dx$ mit Hilfe der Zwischensumme aus Aufgabenteil (a).

(b) Es sei I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion ohne Nullstelle. Zeige, daß $\ln(|f|)$ eine Stammfunktion von $\frac{f'}{f}$ auf I ist.

(c) Berechne mittels Partialbruchzerlegung eine Stammfunktion von

$$x \mapsto \frac{x^3}{x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 16x + 16}.$$

Aufgabe 44:

(a) Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$. Des Weiteren existiere ein $c \in [a,b]$ mit $f(c) > 0$. Zeige, dass $\int_a^b f(x)dx > 0$ ist.

(b) Leite aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung den Mittelwertsatz der Integralrechnung ab.