Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Sommersemester 2010, Blatt 12

Stefan Steidel

Grundlagen der Mathematik 1

Abgabetermin: Montag, 05/07/2010, 10:00

Aufgabe 45:

(a) Zeige das folgende Additionstheorem für den Tangens:

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x) \cdot \tan(y)}.$$

wobei $x, y, x+y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ gelten soll.

(b) Folgere daraus das folgende Additionstheorem für den Arcustangens:

$$\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right).$$

(c) Zeige die folgende Gleichung: $4 \cdot \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right) = \frac{\pi}{4}$.

(d) Berechne das dritte Taylorpolynom $T^3_{\arctan,0}$ des Arcustangens.

(e) Benutze $T^3_{\arctan,0}$, um $\frac{\pi}{4}$ und damit π näherungsweise zu bestimmen. Zeige, dass die Näherung bis auf zwei Nachkommastellen exakt ist mit $\pi = 3,14\ldots$.

Aufgabe 46: Beweise die folgenden Aussagen:

(a) Für $y \in (0, \infty)$ ist das uneigentliche Integral $\int_0^\infty x^{y-1} \cdot \exp(-x)\, dx$ konvergent.

(b) Die Funktion $\Gamma : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R} : y \mapsto \int_0^\infty x^{y-1} \cdot \exp(-x)\, dx$ erfüllt die Funktionalgleichung $\Gamma(y+1) = y \cdot \Gamma(y)$ für $y \in (0, \infty)$.

(c) Für $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ gilt $\Gamma(n) = (n-1)!$.

Aufgabe 47:

(a) Für $x, y \in K^n$, $A, B \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$ und $\lambda \in K$ gelten: $A(x+y) = Ax + Ay$, $A(\lambda x) = \lambda Ax$, $f_{A+B} = f_A + f_B$ und $f_{\lambda A} = \lambda f_A$.

(b) Für $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$ und $B \in \mathrm{Mat}(n \times p, K)$ gilt $(AB)^t = B^t A^t$.

(c) Sei $n \geq 1$ und $\mathbb{1}_n \in \mathrm{Mat}_n(K)$ die *Einheitsmatrix*, die auf der Diagonalen Einsen und außerhalb der Diagonalen Nullen hat. Zeige, die Menge

$$\mathrm{Gl}_n(K) = \{A \in \mathrm{Mat}_n(K) \mid \exists\, B \in \mathrm{Mat}_n(K) :\ BA = AB = \mathbb{1}_n\}$$

ist eine Gruppe mit neutralem Element $\mathbb{1}_n$, die für $n > 1$ nicht kommutativ ist.

Aufgabe 48: Welche der folgenden Teilmengen von K^3 sind Unterräume des K^3? Begründe Deine Anworten.

(a) $\{(x_1, x_2, x_3)^t \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 \cdot x_2 = 2x_3\}$ für $K = \mathbb{R}$.

(b) $\{(x_1, x_2, x_3)^t \in \mathbb{R}^3 \mid ax_1 + x_2 + x_3 = a + 1\}$ für ein festes $a \in \mathbb{R}$ für $K = \mathbb{R}$.

(c) $\{(x_1, x_2, x_3)^t \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 \leq 0\}$ für $K = \mathbb{R}$.

(d) $\{(1,0,0)^t, (0,1,0)^t, (1,1,0)^t, (0,0,0)^t\}$ für $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{F}_2$.