Fachbereich Mathematik Sommersemester 2010, Blatt 13
Thomas Markwig Stefan Steidel

Grundlagen der Mathematik 1

Abgabetermin: Montag, 12/07/2010, 10:00

Aufgabe 49: Sei $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $U = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(-x) = -f(x)\ \forall\, x \in \mathbb{R}\}$ und $U' = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(-x) = f(x)\ \forall\, x \in \mathbb{R}\}$. Zeige die folgenden Aussagen:

(a) $U, U' \leq V$.

(b) $V = U \oplus U'$.

Aufgabe 50: Seien V, W K–Vektorräume, $\lambda \in K$ und $f, g \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$. Zeige die folgenden Aussagen:

(a) $f + g \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ und $\lambda \cdot f \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$, d.h. $\mathrm{Hom}_K(V, W) \leq W^V$.

(b) $\mathrm{Ker}(f + g) \supseteq \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)$ und $\mathrm{Im}(f + g) \subseteq \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$. Finde außerdem Beispiele, so dass die Inklusionen strikt sind.

Aufgabe 51:

(a) Sei V ein K–Vektorraum. Dann heißt $f \in \mathrm{Hom}_K(V, V)$ *Projektion*, falls $f^2 = f$ gilt. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

  (1) f ist eine Projektion.
  (2) $\mathrm{id}_V - f$ ist eine Projektion.
  (3) $\mathrm{Im}(\mathrm{id}_V - f) = \mathrm{Ker}(f)$.
  (4) $\mathrm{Ker}(\mathrm{id}_V - f) = \mathrm{Im}(f)$.

(b) Sei V ein K–Vektorraum und $U, U' \leq V$. Zeige, dass $U/(U \cap U') \cong (U + U')/U'$ gilt.

Aufgabe 52:

(a) Welche der folgenden Familien sind linear unabhängig / Erzeugendensysteme / Basen von $\mathbb{R}^2$?

$$(1)\ \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) \qquad (2)\ \left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\right) \qquad (3)\ \left(\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\right)$$

$$(4)\ \left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\right) \qquad (5)\ \left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right)$$

(b) Ist $f : V \longrightarrow W$ eine K-lineare Abbildung, F eine Familie von Vektoren in V, so ist $f\big(\mathrm{Lin}(F)\big) = \mathrm{Lin}\,\big(f(x) \mid x \in F\big)$.

(c) Sei V ein K–Vektorraum, $U \leq V$, $0 \neq x \in U$ und $y \in V \setminus U$. Zeige, dass dann (x, y) linear unabhängig ist.

(d) Sei V ein $\mathbb{C}$–Vektorraum, dann ist V offensichtlich auch ein $\mathbb{R}$–Vektorraum, und seien $x_1, \ldots, x_n \in V$. Zeige, dass $(x_1, \ldots, x_n)$ genau dann linear unabhängig über $\mathbb{C}$ ist, wenn $(x_1, ix_1, \ldots, x_n, ix_n)$ linear unabhängig über $\mathbb{R}$ ist.