Grundlagen der Mathematik 1

Die Lösungen brauchen nicht eingereicht zu werden und werden auch nicht mehr korrigiert. Die Aufgaben sind aber eine wichtige Vorbereitung auf die Klausur und es wird aber eine Musterlösung geben. Zudem können in den Tutorien Fragen gestellt werden.

Aufgabe 53: Es sei V ein K-Vektorraum mit $\dim_K(V) = 5$, und U und U' Unterräume mit $\dim_K(U) = 3$ und $\dim_K(U') = 4$.

a. Welche Werte kann $\dim_K(U \cap U')$ annehmen?

b. Gib für jeden der Werte von $\dim_K(U \cap U')$ ein Beispiel (K, V, U, U') an.

Aufgabe 54:

(a) Sei $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$. Zeige die folgenden Aussagen:

  (1) Genau dann ist f_A bijektiv, wenn $A \in \mathrm{Gl}_n(K)$.
  (2) Ist $A \in \mathrm{Gl}_n(K)$, so gilt $(f_A)^{-1} = f_{A^{-1}}$.

(b) Seien V und W zwei K-Vektorräume, $f : V \longrightarrow W$ eine K-lineare Abbildung und B eine Basis von V.

  (1) Genau dann ist f surjektiv, wenn $f(B)$ ein Erzeugendensystem von W ist.
  (2) Genau dann ist f injektiv, wenn $f(B)$ linear unabhängig ist.
  (3) Genau dann ist f bijektiv, wenn $f(B)$ eine Basis von W ist.

(c) Finde einen K-Vektorraum V sowie zwei K-lineare Abbildungen $f, g : V \longrightarrow V$, so dass Folgendes gilt:

  (1) f ist injektiv, aber nicht surjektiv.
  (2) g ist surjektiv, aber nicht injektiv.

Aufgabe 55: Für eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$ bezeichne $\mathrm{ZR}(A)$ die lineare Hülle der Zeilen von A und $\mathrm{SR}(A)$ die lineare Hülle der Spalten von A.
Zeige für $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$, $S \in \mathrm{Gl}_m(K)$ und $T \in \mathrm{Gl}_n(K)$, dass

$$\mathrm{ZR}(A) = \mathrm{ZR}(SA) \quad \text{und} \quad \mathrm{SR}(A) = \mathrm{SR}(AT).$$

Aufgabe 56: Betrachte den Vektorraum $P_n := \left\{\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot t^k \mid a_k \in K\right\}$ der Polynome vom Grad höchstens n (siehe Skript Beispiel 22.6) mit Basis $B = (t^0, t^1, \ldots, t^n)$ und die formale Ableitung

$$d : P_n \longrightarrow P_n : \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot t^k \mapsto \sum_{k=1}^{n} k \cdot a_k \cdot t^{k-1}.$$

(a) Zeige, daß d eine K-lineare Abbildung ist.

(b) Berechne die Matrixdarstellung $M_B^B(d)$ und den Rang von d.

(c) Zeige, dass im Fall $n = 3$ auch $D = (t^0, t^0 + t^1, t^1 + t^2, t^2 + t^3)$ eine Basis von P_3 ist und berechne die Basiswechsel T_B^D und T_D^B sowie die Matrixdarstellung $M_D^D(d)$.